Г. КОВАЛЕВСКІЙ,
профессоръ университета въ Боннѣ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО

подъ редакціей и съ примѣчаніями приватъ-доцента

С. О. ШАТУНОВСКАГО

Съ 18 чертежами

MATHESIS

Одесса, 1909.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ

Типографія Акціонернаго Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла
(Пушкинская ул., соб. д. № 18).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ этой книгѣ излагаются основныя понятія и главныя предложенія анализа приблизительно въ томъ видѣ, въ какомъ этого требуютъ современныя научныя воззрѣнія. Пытаясь сдѣлать изложеніе возможно точнымъ, авторъ все же старался не запугать читателя слишкомъ большими трудностями предмета. Совершенно строгое обоснованіе анализа безконечно малыхъ возможно лишь послѣ яснаго установленія понятія о числѣ, что слишкомъ расширило бы рамки этой работы. Вотъ почему отъ этого пришлось отказаться.

Авторъ надѣется, что всякій образованный человѣкъ будетъ въ состояніи вынести изъ этой маленькой книжки понятіе о сущности анализа, и что она окажется особенно полезной для студентовъ-математиковъ.

Боннъ, Сентябрь 1907.

Г. Ковалевскій.

ОТЪ РЕДАКТОРА.

Точное опредѣленіе понятій и строго-логическое развитіе идей, лежащихъ въ основаніи великой науки Ньютона и Лейбница, потребовало огромной затраты труда при чрезвычайной глубинѣ мышленія со стороны первоклассныхъ геометровъ второй половины 19-го вѣка. Знакомство съ этими идеями и понятіями въ той обработкѣ, какая имъ дана Вейерштрассомъ, Дедекиндомъ, Канторомъ и другими новѣйшими геометрами, представляетъ большую важность для общаго философскаго развитія ума и, во всякомъ случаѣ, является обязательнымъ не только для преподавателя анализа безконечномалыхъ, но и для тѣхъ, которые желаютъ составить себѣ хотя бы только общее понятіе о роли математики въ современной философіи. Однако, самая глубина идей и отвлеченность понятій являлись препятствіемъ для ихъ широкаго распространенія въ образованной части публики.

Маленькое сочиненіе боннскаго профессора Ковалевскаго имѣетъ въ виду ознакомить широкій кругъ читателей съ началами анализа безконечныхъ въ той формальной постановкѣ, какая дана этой наукѣ въ новѣйшее время упомянутыми учеными, и мы думаемъ, что появленіе этого сочиненія на русскомъ языкѣ принесетъ пользу не только преподавателямъ средней школы, но и нашему учащемуся юношеству особенно теперь, когда начала ученія о безконечныхъ введены въ обязательный курсъ реальныхъ училищъ.

Настоящій переводъ, сдѣланный госпожею Л. С. Бри, снабженъ нами нѣсколькими примѣчаніями, содержащими разъясненія или дополненія тѣхъ мѣстъ, гдѣ, какъ намъ казалось, авторъ былъ слишкомъ лакониченъ. Эти примѣчанія отмѣчены номерами.

Одесса, Декабрь 1908.

С. Шатуновскій.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Функціи, предѣлы, ряды . . . . . 1—46

ГЛАВА ВТОРАЯ

Дифференціальное исчисленіе . . . . . 47—108

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Интегральное исчисленіе . . . . . 109—131

Историческій очеркъ . . . . . 132—140

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ФУНКЦІИ, ПРЕДѢЛЫ, РЯДЫ.

§ 1. Перемѣнныя и постоянныя величины.

Величина называется перемѣнной, если принимаетъ различныя значенія; постоянной, если сохраняетъ одно и то же значеніе Такъ, напримѣръ, размѣры и вѣсъ человѣческаго тѣла въ періодѣ роста — величины перемѣнныя, а метръ и килограммъ, которыми значенія этихъ величинъ измѣряются, — постоянныя. Время, протекшее отъ нѣкотораго опредѣленнаго момента, есть величина перамѣнная, между тѣмъ какъ секунда, которой измѣряется это время, представляетъ постоянную величину.

§ 2. Функція отъ одной перемѣнной.

Понятіе о функціи есть важнѣйшее понятіе высшей математики. Въ томъ общемъ видѣ, въ которомъ мы сейчасъ его разовьемъ, оно впервые введено было Дирихле (Dirichlet) (1837).

y называется функціей отъ x, если каждому значенію x соотвѣтствуетъ нѣкоторое значеніе y [1]). Если, напримѣръ, мы будемъ обозначать черезъ x возрастъ человѣка, а черезъ y его ростъ (или вѣсъ) въ возрастѣ x, то ясно, что каждому значенію x отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе y. Такимъ образомъ, ростъ и вѣсъ человѣка являются функціями его возраста.

Приведемъ другіе примѣры функціональной зависимости:

Поверхность и объемъ шара — функціи его радіуса.

---

[1]) Въ томъ случаѣ, когда одному значенію x соотвѣтствуетъ больше одного значенія y, перемѣнную y также называютъ функціей отъ x, а именно многозначной функціей отъ x.

Скорость падающаго тѣла въ концѣ паденія есть функція вы соты паденія.

Объемъ массы газа (при данной температурѣ) есть функція давленія.

Мы рекомендуемъ читателю самому подыскать примѣры функціональной зависимости въ геометріи, физикѣ и химіи, чтобы тѣмъ самымъ возможно лучше уяснить себѣ понятіе о функціи.

Если y есть функція отъ x, то x называютъ независимой, а y зависимой перемѣнной.

Чтобы показать, что y есть функція отъ x, пишутъ:

$$y = f(x) \qquad \text{(читаютъ: „}y \text{ равно } f \text{ отъ } x\text{“).}$$

Когда приходится разсматривать одновременно различныя функціи, то пользуются обозначеніями $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ... или $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, ... Для обозначенія функцій употребляютъ почти всѣ буквы алфавита (большія и малыя).

§ 3. Функція отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

z называется функціей отъ x и y, если каждой системѣ значеній x и y соотвѣтствуетъ одно значеніе z[2]; x и y называютъ независимыми перемѣнными, а z зависимой перемѣнной и пишутъ:

$$z = f(x, y).$$

Если наряду съ функціей $f(x, y)$ приходится разсматривать еще другія функціи отъ x и y, то вмѣсто f пишутъ другія буквы.

Примѣры функцій отъ двухъ перемѣнныхъ.

Площадь прямоугольника есть функція двухъ его сторонъ. Объемъ данной массы газа есть функція давленія и температуры. Читателю полезно будетъ самому подобрать дальнѣйшіе примѣры.

Вполнѣ аналогичнымъ образомъ опредѣляютъ функнію трехъ, четырехъ, пяти, ... перемѣнныхъ.

§ 4. Геометрическое изображеніе чиселъ, паръ чиселъ и системъ трехъ чиселъ.

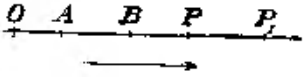
Въ своей „Геометріи“ (1637) Декартъ (Descartes) далъ простой способъ наглядно изображать числа точками прямой, пары чиселъ*)—

[2]) Въ случаѣ многозначной функціи—нѣсколько значеній z.

*) Выражаясь точно, мы должны были бы сказать „расположенныя пары чиселъ“ и „расположенныя системы изъ трехъ чиселъ“, такъ какъ въ

точками плоскости, системы трехъ чиселъ — точками пространства, и тѣмъ положилъ основаніе аналитической геометріи.

1. На всякой прямой (фиг. 1) мы можемъ двигаться по двумъ различнымъ направленіямъ. Одно изъ этихъ двухъ направленій указано на чертежѣ стрѣлкой. Назовемъ его положительнымъ, а другое отрицательнымъ направленіемъ. Движеніе по нашей прямой въ положительномъ направленіи мы будемъ называть прямымъ движеніемъ, а въ отрицательномъ — обратнымъ движеніемъ *). Пусть A — первая, а B — вторая точка на прямой; пусть d будетъ разстояніе между ними, измѣренное нѣкоторой основной мѣрой длины. Двигаясь по прямой отъ A къ B, мы описываемъ путь AB. Въ случаѣ прямого движенія мы условимся говорить:



Фиг. 1.

путь AB выражается числомъ d;

въ случаѣ обратнаго —

путь AB выражается числомъ $-d$.

Такимъ образомъ, число, выражающее длину пути AB, есть разстояніе между двумя точками A и B, снабженное извѣстнымъ знакомъ. Знакъ этотъ „$+$“ въ томъ случаѣ, когда мы приходимъ изъ A въ B прямымъ движеніемъ (локомотивъ идетъ, слѣдовательно, прямымъ ходомъ отъ A къ B), и „$-$“, если мы приходимъ изъ A въ B обратнымъ движеніемъ (локомотивъ идетъ обратнымъ ходомъ изъ A въ B).

Число, выражающее отрѣзокъ AB, мы будемъ обозначать черезъ $\overline{AB}$, а разстояніе между двумя точками A и B черезъ $|AB|$.

Очевидно въ такомъ случаѣ, что $|AB| = |BA|$, но

$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \qquad (1)$$

Это ясно на примѣрѣ съ локомотивомъ: если, переходя изъ A въ B, онъ имѣетъ прямое движеніе, то при переходѣ изъ B въ A онъ необходимо имѣетъ обратное движеніе.

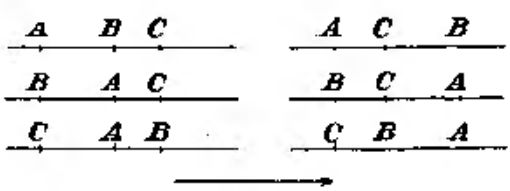
каждой системѣ, состоящей изъ двухъ чиселъ, различаютъ первый и второй члены, а въ системѣ, которая состоитъ изъ трехъ чиселъ, различаютъ первый второй и третій члены.

*) Для наглядности можно представить себѣ, что прямая есть одинъ изъ двухъ рельсовъ, по которымъ движется локомотивъ; предполагается, что поворотъ локомотива невозможенъ.

Между отрѣзками, опредѣляемыми тремя точками A, B и C [3]), всегда существуетъ слѣдующее важное соотношеніе:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \quad \text{или} \quad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}. \quad (2)$$

Формулу эту нетрудно получить при помощи фиг. 2, на которой представлены всевозможныя размѣщенія точекъ A, B и C; при этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду равенство (1) [4]).



Фиг. 2.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній мы можемъ слѣдующимъ образомъ изображать числа при помощи точекъ прямой, которую будемъ называть числовой линіей. Выбираемъ на прямой (фиг. 1) неподвижную начальную точку O. Къ каждой точкѣ P мы затѣмъ относимъ число

$$x = \overline{OP}, \quad (3)$$

которое называемъ ея абсциссой. При такихъ условіяхъ двѣ различныя точки P и P_1 имѣютъ всегда различныя абсциссы, ибо, допустивъ, что $\overline{OP} = \overline{OP_1}$, мы отсюда вывели бы на основаніи формулы (2), что $\overline{PP_1} = 0$, а слѣдовательно, и $PP_1 = 0$ [5]). Далѣе, если число x дано, то всегда можно отыскать такую точку P, чтобы выполнялось равенство $OP = x$. Если $x = 0$, то точки P и O совпадаютъ; если x есть положительное число, то мы переходимъ изъ O въ P, перемѣщаясь прямымъ движеніемъ на разстояніе x, если же x есть число отрицательное, то изъ O въ P попадаемъ обратнымъ движеніемъ, подвигаясь на разстояніе $-x$. Итакъ, при помощи формулы (3) между числами x и точками P прямой устанавливается соотвѣтствіе, обладающее слѣдующими свойствами:

Каждой точкѣ P соотвѣтствуетъ нѣкоторое число x, ея абсцисса; различныя точки имѣютъ различныя абсциссы; каждое число x является абсциссой нѣкоторой точки.

---

[3]) Расположенными на одной прямой.

[4]) Разсмотримъ для примѣра размѣщеніе CAB; непосредственно изъ чертежа видно, что $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$, или $\overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CA} = 0$, а такъ какъ $-\overline{CB} = \overline{BC}$, то $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

[5]) Т. е. точки P и P_1 совпали бы.

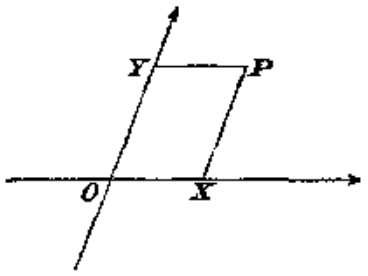
Подобнаго рода соотвѣтствіе условимся называть отображеніемъ. Такимъ образомъ намъ удалось отобразить числа въ точкахъ прямой.

Если x и x_1 суть абсциссы точекъ P и P_1, то изъ равенства (2) слѣдуетъ, что

$$\overline{PP_1} = x_1 - x.$$

Пользуясь этой формулой, читатель можетъ найти абсциссу средины отрѣзка.[6])

2. Чтобы получить наглядное изображеніе пары чиселъ x и y, мы проводимъ въ нѣкоторой плоскости черезъ какую-либо ея точку O (начальную точку) двѣ различныя постоянныя прямыя (оси координатъ). На каждой изъ нихъ мы устанавливаемъ положительное направленіе (фиг. 3). Одна изъ осей носитъ названіе оси x-овъ, другая называется осью y-овъ. Затѣмъ, черезъ любую точку плоскости P мы проводимъ двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя осямъ, и получаемъ на оси x-овъ точку пересѣченія X, а на оси y-овъ точку пересѣченія Y.



Фиг 3.

Тогда мы полагаемъ[7])

$$x = \overline{OX} = \overline{YP}, \quad y = \overline{OY} = \overline{XP} \qquad (4)$$

и x называемъ координатой x, а y — координатой y точки P. Говорятъ также, что x есть абсцисса, а y ордината точки P.

Каждой точкѣ P плоскости отвѣчаетъ, такимъ образомъ, пара чиселъ x и y, первое изъ нихъ есть абсцисса, второе — ордината точки P. Двумъ различнымъ точкамъ отвѣчаютъ, очевидно, различныя пары чиселъ. Для каждой пары чиселъ x, y можно подыскать точку, абсцисса которой есть x, а ордината y.

Итакъ, намъ удалось отобразить пары чиселъ въ точкахъ плоскости. Отображеніе это выражается формулами (4).

3. Чтобы получить отображеніе системъ трехъ чиселъ x, y, z въ точкахъ пространства, проводятъ черезъ точку O три прямыя

---

[6]) По абсциссамъ его концовъ.

[7]) Положительное направленіе, установленное на прямой, обыкновенно сохраняется при параллельномъ ея перемѣщеніи. Поэтому, устанавливая положительныя направленія на осяхъ координатъ, мы тѣмъ самымъ устанавливаемъ эти направленія и на прямыхъ, параллельныхъ осямъ.

ось x-овъ, ось y-овъ и ось z-овъ, не лежащія въ одной плоскости. Взятыя попарно, онѣ опредѣляютъ три плоскости (координатныя плоскости). Если P есть любая точка пространства, то, проведя черезъ нее три плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ, получаемъ на оси x-овъ точку пересѣченія X, на оси y-овъ точку Y, на оси z-овъ точку Z. Затѣмъ полагаемъ

$$x = \overline{OX},\ y = \overline{OY},\ z = \overline{OZ}. \qquad (5)$$

Эти формулы, какъ легко видѣть, даютъ отображеніе системъ трехъ чиселъ въ точкахъ пространства.

§ 5. Геометрическое изображеніе функцій

Если желаютъ изобразить геометрически функцію $y = f(x)$, то можно воспользоваться отображеніемъ паръ чиселъ въ точкахъ плоскости. Для каждаго значенія независимой перемѣнной *) x разыскиваемъ точку, абсцисса которой равна x, а ордината $f(x)$. Точки эти заполняютъ нѣкоторую кривую, носящую названіе геометрическаго образа функціи $f(x)$; $y = f(x)$ есть уравненіе этой кривой. Когда кривая начерчена, то по ней можно вычислить значеніе зависимой перемѣнной, соотвѣтствующее каждому значенію независимой перемѣнной.

Для геометрическаго изображенія функній $z = f(x, y)$ можно воспользоваться отображеніемъ системъ трехъ чиселъ въ точкахъ пространства. Къ каждой системѣ значеній x, y можно отнести точку, координаты которой соотвѣтственно равны x, y, $f(x, y)$. Точки эти заполняютъ нѣкоторую поверхность, представляющую геометрическій образъ функціи $f(x, y)$; $z = f(x, y)$ есть уравненіе этой поверхности.

Слѣдуетъ еще упомянуть о геометрическомъ изображеніи пары функній одной перемѣнной $y = f(x)$, $z = g(x)$. Оно можетъ быть получено такимъ пріемомъ: для каждаго значенія x мы отыскиваемъ точку, координаты которой соотвѣтственно равны x, $f(x)$, $g(x)$. Точки эти даютъ кривую въ пространствѣ. Она представляетъ собой геометрическій образъ пары функній $f(x)$, $g(x)$.

---

*) На практикѣ приходится довольствоваться конечнымъ числомъ значеній x. Такимъ путемъ получается приблизительное представленіе кривой. Подобнымъ же образомъ получаютъ поверхность, изображающую функцію $f(x, y)$.

Такого рода геометрическія изображенія играютъ важную роль и въ естественныхъ наукахъ и въ техникѣ. Обыкновенно координатныя оси проводить перпендикулярно другъ къ другу. Въ такомъ случаѣ мы получаемъ систему прямоугольныхъ декартовыхъ координатъ.

§ 6 Элементарныя функціи.

m-ая степень числа x (m — положительное цѣлое число), очевидно, есть функція отъ x, такъ какъ каждому значенію x отвѣчаетъ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное значеніе x^m. Если $a_0, a_1, \ldots, a_m$ суть постоянныя величины, то

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

тоже есть функція отъ x. Если a_0 отлично отъ 0, то такая функція называется цѣлой раціональной функціей m-ой степени. Цѣлая раціональная функція нулевой степени есть постоянная величина; геометрическій образъ ея имѣетъ видъ прямой, параллельной оси x-овъ. Геометрическій образъ цѣлой раціональной функціи первой степени есть прямая линія. Геометрическій образъ цѣлой ращональной функціи второй степени есть парабола, кривая, вѣроятно, извѣстная читателю изъ школьнаго курса. Она представляетъ собой геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ нѣкоторой постоянной прямой (директриссы) и постоянной точки (фокуса)*).

Частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій, т. е. выраженіе вида:

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n}$$

называется раціональной функціей. Цѣлая рациональная функція есть частный случай раціональной функціи

Вещественные корни алгебраическаго уравненія

$$x^n + r_1(x) x^{n-1} + \ldots + r_{n-1}(x) x + r_n(x) = 0,$$

коэффиценты котораго $r_1(x), \ldots, r_n(x)$ суть раціональныя функціи отъ x, представляютъ функціи отъ x, называемыя алгебраическими

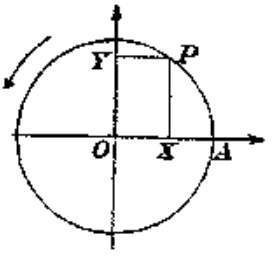
*) Мы будемъ предполагать систему координатъ прямоугольной. Предлагаемъ читателю начертить геометрическіе образы функцій $y = 3x + 4$, $y = x^2$; для этой цѣли удобно пользоваться бумагой, разграфленной на квадратные миллиметры.

функціями. Раціональныя функціи являются частнымъ случаемъ алгебраическихъ (n — 1).

Кромѣ алгебраическихъ, къ элементарнымъ функціямъ причисляютъ еще нѣкоторыя неалгебраическія, или трансцендентныя функціи. Къ нимъ относятъ прежде всего показательную функцію a^x, гдѣ a означаетъ постоянное положительное число*), а затѣмъ логариѳмическую функцію.

Каждому положительному значенію x отвѣчаетъ значеніе y, удовлетворяющее равенству $a^y = x$**); y называется логариѳмомъ x при основаніи a и обозначается такимъ символомъ $\log_a x$. Въ обыкновенныхъ логариѳмическихъ таблицахъ основаніемъ служитъ число 10. Читатель можетъ попытаться начертить геометрическіе образы функцій a^x и $\log_a x$ для случая, когда $a = 10$.

Остановимся на прямоугольной системѣ координатъ. При поворотѣ оси x-овъ на прямой уголъ эта ось совпадетъ съ осью y-овъ, и если вращеніе происходило въ надлежащемъ направленіи, то и положительныя направленія осей совпадутъ. Это направленіе вращенія, указанное на фигурѣ 4 стрѣлкой, мы будемъ называть положительнымъ, а обратное — отрицательнымъ. Опишемъ теперь изъ начальной точки кругъ радіусомъ, равнымъ единицѣ длины. Этотъ кругъ называется кругомъ единицы (Einheitskreis). Онъ пересѣкается съ осью x-овъ въ точкѣ A, такъ что $OA = 1$. Точка A можетъ перемѣщаться по кругу единицы въ двухъ различныхъ направленіяхъ. Когда радіусъ OA вращается въ положительномъ направленіи, то мы говоримъ о положительномъ перемѣщеніи A по кругу, въ обратномъ случаѣ — объ отрицательномъ.



Фиг. 4.

Если точка A, перемѣщаясь въ положительномъ направленіи, описываетъ дугу длины a, то говорятъ, что она описываетъ дугу a; если же перемѣщеніе отрицательное, то говорятъ, что точка A описываетъ дугу $-a$.

*) a^x всегда есть положительное число. (Напримѣръ, выраженіе $4^{\frac{1}{2}}$ имѣетъ два значенія ± 2, но, по условію, мы подъ $4^{\frac{1}{2}}$ разумѣемъ $+2$. *Перев.*)

**) a есть положительное число, не равное 1.

Послѣ этихъ замѣчаній легко опредѣлить двѣ функціи -косинусъ и синусъ, извѣстныя читателю изъ тригонометріи. Когда x дано, то перемѣщаемъ точку A, о которой мы говорили выше, такимъ образомъ, чтобы она описала дугу x. Пусть она окажется въ точкѣ P. Абсциссу этой точки мы назовемъ $\cos x$ (косинусъ x), а ординату $\sin x$ (синусъ x), т. е

$$\overline{OX} = \cos x, \qquad \overline{OY} = \sin x$$

Непосредственно изъ чертежа можно вывести соотношеніе

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Особенно важны слѣдующія двѣ формулы:

$$\cos(x + x') = \cos x \cos x' - \sin x \sin x',$$

$$\sin(x - x') = \sin x \cos x' - \cos x \sin x',$$

которыя доказываются въ элементарной математикѣ.

$\cos x$ и $\sin x$ принадлежатъ къ тригонометрическимъ функціямъ. Кромѣ нихъ, мы упомянемъ еще о тригонометрическихъ функціяхъ $\operatorname{tg} x$ (тангенсъ x) и $\cot x$ (котангенсъ x), опредѣляемыхъ слѣдующими равенствами:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Мы рекомендуемъ читателю начертить геометрическіе образы функцій $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\cot x$.

Перечисляя элементарныя функціи, мы не говорили еще о такъ называемыхъ круговыхъ функціяхъ. Если x дано и заключается между -1 и $+1$, то между 0 и π *) всегда существуетъ одна опредѣленная дуга, косинусъ которой равенъ x. Ее обозначаютъ символомъ $\arccos x$ (arcus cosinus x, т. е. дуга, косинусъ которой равенъ x).

Точно также между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ существуетъ одна дуга синусъ которой равенъ x. Ее называютъ $\arcsin x$ (arcus sinus x, т. е дуга, которой синусъ есть x). Аналогично опредѣляются $\operatorname{arc\,tg} x$ (arcus tangens x, т. е дуга, которая заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и

*) π равно половинѣ окружности круга единицы

тангенсъ которой равенъ x) и $\operatorname{arc\,cot} x$ (arcus cotangens x, т. е. дуга между 0 и π, котангенсъ которой равенъ x). Въ функціяхъ $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,cot} x$ перемѣнная x можетъ принимать всевозможныя значенія, между тѣмъ какъ въ функціяхъ $\arccos x$ и $\arcsin x$ значенія x должны заключаться между -1 и $+1$ (включая эти два значенія).

Функціи, которыя могутъ быть составлены изъ конечнаго числа элементарныхъ функцій, какъ, напримѣръ, $\cos(ax-b)$, $\log(\sin^2 x)$ и т. п., мы также будемъ называть элементарными.

§ 7. Функціи перемѣнной, принимающей цѣлыя положительныя значенія. Числовые ряды.

Мы условились называть y функціей отъ x въ томъ случаѣ, когда каждому значенію x отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе y; при этомъ перемѣнная x не должна непремѣнно принимать всевозможныя значенія, напротивъ, она можетъ пробѣгать лишь опредѣленную систему *) значеній. Эта система значеній можетъ, напримѣръ, составить нѣкоторый интервалъ, т. е. можетъ состоять изъ всѣхъ чиселъ, удовлетворяющихъ неравенствамъ $a \leqslant x \leqslant b$. Такого рода интервалъ **) обозначаютъ символомъ (a, b). Подчинивъ x только одному условію $x \geqslant a$ либо условію $x \leqslant a$, получимъ безконечные интервалы (a, ∞) и $(-\infty, a)$; символъ ∞ читаютъ „безконечность".

Совокупность (или система) значеній, которыя y принимаетъ, можетъ быть и другого рода; впрочемъ, разсмотрѣнныя выше функціи всѣ опредѣлены въ нѣкоторыхъ интервалахъ, напримѣръ, $\arccos x$, $\arcsin x$ — въ интервалѣ $(-1, 1)$, $\log x$ въ интервалѣ $(0, \infty)$. Функцію можно представить себѣ опредѣленной для любой системы значеній, или, какъ выражаются геометрически, для любой системы точекъ числовой линіи ***); требуется только, чтобы каждой точкѣ системы отнесено было нѣкоторое значеніе y; ничего другого въ понятіи о функціи не заключается.

Разсмотримъ функцію $u(x)$, гдѣ значенія x ограничены областью цѣлыхъ положительныхъ чиселъ $1, 2, 3 \ldots$ ****).

*) На числовой линіи этой системѣ значеній отвѣчаетъ нѣкоторая система точекъ.

**) На числовой линіи конечному интервалу соотвѣтствуетъ отрѣзокъ.

***) То же справедливо для плоскости и для пространства.

****) Можно доказать, что функція отъ n перемѣнныхъ, принимающихъ цѣлыя положительныя значенія, не представляетъ ничего болѣе общаго, чѣмъ функція отъ одной такой перемѣнной. (Т. е. комплексъ значеній,

Вмѣсто $u(n)$ мы будемъ писать короче u_n, такимъ образомъ, u_n есть значеніе функціи, соотвѣтствующее значенію $x = n$. Написавъ послѣдовательно значенія функціи, соотвѣтствующія значеніямъ $x = 1, 2, 3, \ldots$, мы получимъ рядъ чиселъ:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Это есть такъ называемый числовой рядъ, или просто рядъ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ числовыхъ рядовъ.

Въ началѣ десятой книги своихъ „Элементовъ" Евклидъ строитъ числовой рядъ по такому правилу: онъ отнимаетъ отъ данной положительной величины часть, которая больше половины этой величины; отъ остатка снова отнимаетъ часть, которая больше половины остатка и т. д. Такимъ образомъ получается числовой рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$, въ которомъ $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$. Относительно этого ряда онъ доказываетъ предложеніе (предложеніе 1 книги X), къ которому мы впослѣдствіи еще вернемся.

Если къ двумъ несоизмѣримымъ положительнымъ величинамъ u_1 и u_2 примѣнить Евклидовъ алгоритмъ послѣдовательнаго дѣленія*, то получится рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$, въ которомъ $u_{n+1} < u_n$, далѣе $u_{2n+2} < \frac{1}{2} u_2$, и $u_{2n+1} < \frac{1}{2} u_{2n-1}$, такъ что въ этомъ случаѣ ряды $u_1, u_3, u_5, \ldots$ и $u_2, u_4, u_6, \ldots$ принадлежатъ къ только-что разсмотрѣнному типу.

Приближенныя значенія дроби $\frac{1}{9}$, вычисленныя съ точностью до одной десятой, до одной сотой, одной тысячной и т. д. даютъ числовой рядъ:

$$0{,}1,\ 0{,}11,\ 0{,}111,\ 0{,}1111;\ \ldots.$$

принимаемыхъ функціей отъ x перемѣнныхъ можетъ быть разсматриваемъ какъ комплексъ значеній, принимаемыхъ нѣкоторой надлежащимъ образомъ построенной функціей отъ одной перемѣнной. При этомъ каждому значенію одной функціи отвѣчаетъ опредѣленное значеніе другой и наоборотъ. Теорема принадлежитъ Георгу Кантору. См. также примѣчаніе 8 къ § 9, стр. 13. *Прим. ред.*

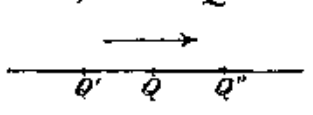
*) Способъ этотъ состоитъ въ томъ, что мы отъ большей величины u_1 отнимаемъ меньшую u_2 столько разъ, сколько это возможно, остатокъ u_2 отнимаемъ до тѣхъ поръ, пока это возможно, отъ u_2 получившійся такимъ образомъ остатокъ u_4 отнимаемъ, пока это возможно, отъ u_3 и т. д. Если напримѣръ, $u_1 = 1$, $u_2 = 1\sqrt{2} - 1$, то рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ будетъ $1, (1\sqrt{2} - 1), (1\sqrt{2} - 1)^2, (1\sqrt{2} - 1)^3, \ldots$.

Опредѣливъ послѣдовательно периметры правильныхъ вписанныхъ въ кругъ единицы четыреугольника, 8-миугольника, 16-тиугольника и т. д., мы получимъ числовой рядъ, который встрѣчается въ элементарной геометріи при приближенномъ вычисленіи числа π.

Часто бываетъ удобно разсматривать вмѣсто числового ряда $u_1, u_2, u_3, \ldots$ его геометрическое изображеніе на числовой линіи. Каждое число u_n представлено на числовой линіи точкой P_n (абсцисса которой равна u_n); поэтому ряду чиселъ соотвѣтствуетъ рядъ точекъ $P_1, P_2, P_3 \ldots$ Такимъ образомъ, вмѣсто числовыхъ рядовъ можно говорить о рядахъ точекъ на прямой *)

§ 8. Точки сгущенія числового ряда.

Пусть $P_1, P_2, P_3, \ldots$ будетъ рядъ точекъ на числовой линіи**). Точка Q называется точкой сгущенія этого ряда, если въ любой окрестности точки Q расположено неограниченное число точекъ ряда***). Смыслъ этого опредѣленія таковъ: если взять интервалъ $Q'Q''$ (фиг. 5), принимая Q за его середину, и опустить въ ряду точекъ всѣ тѣ, которыя не падаютъ въ этотъ интервалъ, то все же останется рядъ точекъ (а не только конечное число ихъ); и это должно имѣть мѣсто всегда, какъ бы ни былъ выбранъ интервалъ $Q'Q''$.



Фиг. 5

Очень важно, чтобы читатель вполнѣ уяснилъ себѣ понятіе о точкѣ сгущенія, такъ какъ оно является основнымъ для дальнѣйшаго изложенія.

§ 9. Примѣры.

Рядъ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ имѣетъ точку сгущенія 0 (и никакой другой не имѣетъ). То же относится и къ числовому ряду Евклида, о которомъ мы раньше упомянули (стр 11). Рядъ 0,1; 0,11; 0,111, ... имѣетъ только одну точку сгущенія, а именно $\frac{1}{9}$. Если взять пери-

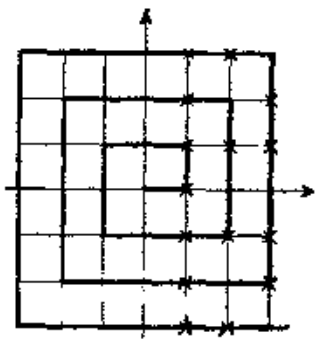
*) Рядъ точекъ на плоскости эквивалентенъ ряду паръ чиселъ $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3; \ldots$ Рядъ точекъ въ пространствѣ — ряду системъ трехъ чиселъ $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3, \ldots$

**) Нѣтъ необходимости въ томъ, чтобы всѣ точки были различны. Ихъ, во всякомъ случаѣ, можно отличать другъ отъ друга при помощи индексовъ. Такъ, напримѣръ, $P, P, P, \ldots$ есть для насъ также рядъ точекъ. Онъ имѣетъ точку сгущенія P.

***) Если $u_1, u_2, u_3, \ldots$ есть числовой рядъ, соотвѣтствующій ряду точекъ $P_1, P_2, P_3, \ldots$, а u есть абсцисса точки Q, то говорятъ также, что u есть точка сгущенія числового рада.

метры правильныхъ вписанныхъ въ кругъ единицы многоугольниковъ о 2^2, 2^3, ... сторонахъ, то получимъ числовой рядъ, единственной точкой сгущенія котораго будетъ 2π (окружность круга единицы). Рядъ 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{1}{7}$, ... имѣетъ двѣ точки сгущенія: 0 и 1.

Существуютъ также числовые ряды съ неограниченнымъ числомъ точекъ сгущенія и даже такіе, для которыхъ каждое число есть точка сгущенія. Всякое раціональное число (т. е. всякую дробь) можно представить въ видѣ $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, и q есть положительное число. Если къ этой дроби отнести точку, имѣющую координаты $x - q$, $y - p$ (въ декартовой системѣ координатъ), то мы получимъ на плоскости систему точекъ $\mathfrak{P}$. На фиг. 6 точки системы $\mathfrak{P}$ отмѣчены крестиками. Если мы станемъ разсматривать всѣ точки, координаты которыхъ суть цѣлыя числа, то точки системы $\mathfrak{P}$ будутъ среди нихъ находиться. Но всѣ точки, координаты которыхъ суть цѣлыя числа, могутъ быть расположены въ рядъ. На нашемъ чертежѣ жирная улиткообразная линія указываетъ порядокъ, въ которомъ точки слѣдуютъ другъ за другомъ. Если въ этомъ ряду отбросить всѣ точки, не помѣченныя крестиками, то получится рядъ, составленный изъ точекъ системы $\mathfrak{P}$. Замѣнивъ каждую точку соотвѣтствующимъ ей числомъ $\frac{p}{q}$, мы получимъ рядъ [1]), въ которомъ содержатся всѣ раціональныя числа и каждое входитъ только по одному разу. Въ любой окрестности каждаго числа находится неограниченное число раціональныхъ чиселъ. Такимъ образомъ въ нашемъ ряду каждое число является точкой сгущенія.



Фиг. 6.

[1]) Это есть рядъ

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad \ldots$$
$$1' \quad 1'' \quad 1''' \quad 2' \quad 2'' \quad 1'' \quad 1''' \quad 3' \quad 3'' \quad 3''' \quad 3'' \quad 2'' \quad 1''' \quad \ldots$$

Перенумеровавъ члены этого ряда при помощи чиселъ натуральнаго ряда

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

находимъ, что каждому натуральному числу n, разсматриваемому, какъ номеръ мѣста дроби $\frac{p}{q}$, въ предыдущемъ ряду отвѣчаетъ пара вза-

§ 10 **Теорема Вейерштрасса.**

Числовой рядъ, заключенный въ конечномъ интервалѣ, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, **одну** точку сгущенія.

Пусть числовой рядъ заключается въ интервалѣ (a, b), такъ что всѣ его члены больше a или равны a и меньше b или равны b. Возьмемъ цѣлое число m, меньшее, чѣмъ a, и выберемъ такое цѣлое число n, чтобы $m + n$ было больше, чѣмъ b. Тогда всѣ числа ряда будутъ находиться между двумя цѣлыми числами m и $m + n$. Среди интерваловъ

$$(m, m+1), \quad (m+1, m+2), \ldots, (m+n-1, m+n)$$

долженъ быть, по крайней мѣрѣ, одинъ, который содержитъ неограниченное число членовъ ряда. Если бы въ каждый изъ этихъ интерваловъ входило лишь конечное число такихъ членовъ, то и интервалъ $(m, m+n)$ содержалъ бы лишь ограниченное число ихъ, но мы знаемъ, что между m и $m+n$ лежатъ всѣ члены ряда. Отсюда слѣдуетъ, что непремѣнно должно существовать цѣлое число k, обладающее тѣмъ свойствомъ, что въ интервалѣ

J) $$(k, k+1)$$

содержится неограниченное число членовъ ряда. Раздѣлимъ J на десять равныхъ интерваловъ

$$\left(k, k+\frac{1}{10}\right), \left(k+\frac{1}{10}, k+\frac{2}{10}\right) \ldots \left(k+\frac{9}{10}, k+1\right),$$

—

имно-простыхъ цѣлыхъ чиселъ p и q и каждой парѣ взаимно-простыхъ чисель p и q (q не $= 0$), разсматриваемыхъ какъ члены дроби $\frac{p}{q}$, отвѣчаетъ опредѣленное цѣлое положительное число n. Положивъ $z = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть перемѣнныя, принимающія всевозможныя цѣлыя значенія, при чемъ, однако, p и q суть числа взаимно-простыя и q не $= 0$, находимъ, что для указанныхъ значеній p и q перемѣнная z есть функція отъ двухъ перемѣнныхъ p и q. Но вышеупомянутымъ числомъ n вполнѣ опредѣляется несократимая дробь $\frac{p}{q}$ и, наоборотъ, этой дробью опредѣляется въ предыдущемъ ряду число n, а потому z можно разсматривать какъ функцію одной перемѣнной n, принимающей послѣдовательно значенія 1, 2, 3, . . . Въ этомъ смыслѣ понятіе о функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, принимающихъ только цѣлыя значенія, не имѣетъ большей общности, чѣмъ понятіе о функціи отъ одной перемѣнной. *Прим. ред.*

между ними долженъ находиться, по меньшей мѣрѣ, одинъ какой-либо

$$J) \qquad \left(k \cdot \frac{k_1}{10}, \; k \quad \frac{k_1 - 1}{10}\right),$$

который содержитъ неограниченное число членовъ ряда. Среди десяти равныхъ частей интервала J_1

$$\left(k \cdot \frac{k_1}{10}, \; k \quad \frac{k_1}{10} \quad \frac{1}{100}\right), \; \ldots \; \left(k - \frac{k_1}{10} \quad \frac{9}{100}, \; k \quad \frac{k_1}{10} \quad 1\right)$$

въ свою очередь долженъ оказаться одинъ

$$J_2) \qquad \left(k - \frac{k_1}{10} \cdot \frac{k_2}{100}, \; k \quad \frac{k_1}{10} \quad \frac{k_2}{100} \quad 1\right),$$

въ которомъ такъ же, какъ и въ J и J_1 имѣется неограниченное число членовъ нашего ряда. Этотъ процессъ дѣленія промежутковъ можно продолжать какъ угодно далеко. Получающіяся при этомъ числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ всѣ принадлежатъ ряду 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Читатель привыкъ разсматривать всякую безконечную десятичную дробь, какъ нѣкоторое число.

Если возьмемъ теперь число

$$u = k \quad 0, k_1 k_2 k_3 \ldots,$$

то оно окажется точкой сгущенія нашего числового ряда, ибо u лежитъ въ интервалѣ J_n, длина котораго равна $\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$[3]. Въ любомъ интервалѣ $(u - \varepsilon, \; u \quad \varepsilon)$, который мы построимъ, принявъ u за его середину, будетъ содержаться интервалъ J_n, если выбрать n достаточно большимъ. Но въ интервалѣ J_n заключается неограниченное число членовъ ряда, значитъ, и въ интервалѣ $(u - \varepsilon, \; u \quad \varepsilon)$ ихъ имѣется неограниченное число.

§ 11. Сходящіеся числовые ряды. Предѣлы.

На основаніи теоремы Вейерштрасса мы знаемъ, что числовой рядъ $u_1, u_2, u_3 \ldots$, заключенный въ конечномъ интервалѣ $(a \quad b)$, имѣетъ по крайней мѣрѣ, одну точку сгущенія. Разсмотримъ тотъ особый случай, когда имѣется только одна точка сгущенія

---

[3]) Длиной интервала (a, b) называется абсолютная величина разности $b - a$.

(которую обозначаемъ черезъ u). Принявъ u за середину, построимъ нѣкоторый интервалъ $(u-\varepsilon, u+\varepsilon)$, тогда внѣ его будетъ находиться лишь конечное число членовъ ряда. Если бы по опущеніи всѣхъ членовъ, заключающихся въ интервалѣ $(u-\varepsilon, u+\varepsilon)$, остался еще рядъ, то по теоремѣ Вейерштрасса онъ имѣлъ бы точку сгущенія, навѣрное отличную отъ u. Въ такомъ случаѣ первоначальный рядъ имѣлъ бы, вопреки допущенію, больше одной точки сгущенія. Это можно выразить такъ:

При всякомъ положительномъ ε **всѣ** члены ряда, **за исключеніемъ конечнаго числа** ихъ, лежатъ между $u-\varepsilon$ и $u+\varepsilon$.

Если случится, что, за исключеніемъ конечнаго числа членовъ ряда, всѣ прочіе его члены будутъ обладать нѣкоторымъ свойствомъ, то мы будемъ говорить, что „почти всѣ“ члены ряда обладаютъ этимъ свойствомъ.

Согласно съ этимъ опредѣленіемъ, высказанное выше предложеніе можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

„Почти всѣ“ члены ряда удовлетворяютъ неравенству*)

$$u - u_n < \varepsilon,$$

каково бы ни было положительное число ε.

Если рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ находится въ указанномъ отношеніи къ числу u, то онъ называется сходящимся, и тогда говорятъ, что u есть его предѣлъ, или же, что рядъ стремится къ u, либо, наконецъ, что u_n при неограниченно возрастающемъ n стремится къ u (имѣетъ предѣломъ u, стремится къ предѣлу u). Это выражаютъ формулой

$$\lim_{n=\infty} u_n = u, \quad (\text{пред}_{n=\infty} u_n = u):$$

lim есть начало латинскаго слова limes (граница). Формула эта читается такимъ образомъ: предѣлъ u_n (или предѣлъ отъ u_n) при n, равномъ бязконечности, равенъ u. Упомянутые выше ряды Евклида (какъ онъ самъ это доказываетъ въ теоремахъ 1 и 2 книги X) имѣютъ предѣломъ 0. Периметры вписанныхъ въ кругъ единицы правильныхъ 2^n-угольниковъ стремятся при безпредѣльно возрастающемъ n къ 2π.

*) Черезъ $|x|$ обозначаютъ абсолютное значеніе x. Такимъ образомъ, $|x| = x$, если x есть положительное число и $|x| = -x$, когда x есть отрицательное число.

Теперь докажемъ еще, что разсмотрѣнные нами вначалѣ ряды (заключающіеся въ конечномъ интервалѣ и имѣющіе только одну точку сгущенія) суть единственные сходящіеся ряды.

Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots$ будетъ сходящійся числовой рядъ, имѣющій предѣлъ u. Мы знаемъ, что всѣ члены ряда, за исключеніемъ конечнаго числа ихъ, лежатъ въ интервалѣ $u - \varepsilon$ и $u + \varepsilon$. Выберемъ теперь число a, которое было бы меньше каждаго изъ исключенныхъ членовъ и также меньше числа $u - \varepsilon$, выберемъ еще число b, которое было бы больше каждаго изъ исключенныхъ членовъ и въ то же время больше числа $u + \varepsilon$; тогда всѣ члены ряда будутъ находиться между a и b. Если бы, помимо числа u (которое, очевидно, есть точка сгущенія), существовала еще одна точка сгущенія u', то между $u' - \varepsilon$ и $u' + \varepsilon$ должно было бы заключаться неограниченное число членовъ ряда. Если же ε настолько мало, что интервалы $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ и $(u' - \varepsilon, u' + \varepsilon)$ не имѣютъ общихъ точекъ, то этого не можетъ быть, такъ какъ внѣ интервала $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ существуетъ лишь конечное число членовъ ряда; u есть, такимъ образомъ, единственная точка сгущенія.

Замѣчаніе. Если рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ стремится къ u и мы присоединимъ къ нему конечное число произвольныхъ членовъ, то мы получимъ новый рядъ, который имѣетъ тотъ же предѣлъ u. Дѣйствительно, члены новаго ряда такъ же, какъ и стараго, лежатъ „почти всѣ“ между $u - \varepsilon$ и $u + \varepsilon$.

Если въ ряду $u_1, u_2, u_3, \ldots$ опустить конечное число членовъ (или даже неограниченное число членовъ, лишь бы еще осталось неограниченное число ихъ), то новый рядъ также будетъ стремиться къ предѣлу u.

Сходящійся рядъ остается сходящимся и сохраняетъ тотъ же предѣлъ при измѣненіи порядка его членовъ.

Если пред. $u_n = c$ и пред. $v_n = c$ то рядъ $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ имѣетъ тотъ же предѣлъ c.

§ 12. Простѣйшія предложенія о предѣлахъ.

1. Если *)

$$\text{пред. } u_n = u, \quad \text{пред. } v_n = v,$$

то

$$\text{пред. } (u_n + v_n) = u + v.$$

*) Мы для краткости опускаемъ $n = \infty$ подъ символомъ пред.

„Почти всѣ“ u_n заключаются между $u - \frac{\varepsilon}{2}$ и $u + \frac{\varepsilon}{2}$ *); точно такъ же „почти всѣ“ v_n лежатъ между $v - \frac{\varepsilon}{2}$ и $v + \frac{\varepsilon}{2}$; слѣдовательно, „почти всѣ“ $u_n + v_n$ находятся между $(u+v)-\varepsilon$ и $(u+v)+\varepsilon$.

2. Если

$$\text{пред. } u_n = u, \quad \text{пред. } v_n = v,$$

то

$$\text{пред. } (u_n \cdot v_n) = u \, v.$$

„Почти всѣ“ u_n, v_n удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$|u - u_n| < \varepsilon, \quad |v - v_n| < \varepsilon.$$

Но

$$uv - u_n v_n = (u - u_n)\, v + (v - v_n)\, u_n;$$

поэтому **)

$$|uv - u_n v_n| \leqq |u - u_n|\,|v| + |v - v_n|\,|u_n|$$
$$< |u - u_n|\,|v| + |v - v_n|\,|u| + |u - u_n|\,|v - v_n|.$$

„Почти всѣ“ произведенія $u_n v_n$ удовлетворяютъ, слѣдовательно, неравенству

$$|uv - u_n v_n| \leqq \varepsilon\,(|u| + |v|) + \varepsilon^2 \text{ [10]}.$$

Если ε' есть произвольное напередъ заданное число, то выберемъ положительное число ε, меньшее 1 и меньшее, чѣмъ $\varepsilon' : (|u| + |v| + 1)$; въ такомъ случаѣ для „всѣхъ почти“ $u_n v_n$

$$|uv - u_n v_n| < \varepsilon'.$$

Слѣдствія Если a есть нѣкоторая постоянная величина и пред. $u_n = u$, то пред. $(a \cdot u_n) = a \cdot u$. Для доказательства достаточно въ предыдущей теоремѣ положить всѣ величины v_n равными a, а, значитъ, и v равнымъ a. Взявъ $a = -1$, найдемъ, что пред. $(-u_n) = -u$. Изъ теоремы 1 слѣдуетъ, что пред. $(u_n - v_n) = u - v$, если пред. $u_n = u$, а пред. $v_n = v$.

*) ε -произвольно выбранное положительное число.

**) Мы пользуемся здѣсь предложеніемъ, которое не трудно доказать, а именно: $|a+b| \leqq |a| + |b|$. *) Отсюда слѣдуетъ также (такъ какъ $u_n = u + u_n - u$), что $|u_n| \leqq |u| + |u - u_n|$.

*) Знакъ $<$ въ случаѣ, когда a и b имѣютъ разные знаки.

[10]) Ибо $|u - u_n|, |v - v_n| < \varepsilon$.

3. Если

$$\text{пред. } u_n = u \quad \text{и} \quad u \text{ не нуль},$$

то *)

$$\text{пред. } \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u}.$$

Выберемъ произвольное положительное число ε, меньшее, чѣмъ $\frac{1}{2}|u|$. Такъ какъ „почти всѣ" числа u_n будутъ удовлетворять неравенству

$$|u - u_n| < \varepsilon,$$

то абсолютная величина каждаго изъ чиселъ u_n будетъ больше, чѣмъ $\frac{1}{2}\cdot|u|$ (ибо $\varepsilon < \frac{1}{2}|u|$)[11]. Раздѣливъ теперь обѣ части неравенства на $|u|\cdot|u_n|$, получимъ:

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \frac{\varepsilon}{|u|\cdot|u_n|} < \frac{2\varepsilon}{u^2}.$$

Если ε' есть **любое** напередъ заданное положительное число, то достаточно взять число $\varepsilon < \frac{\varepsilon' u^2}{2}$ для того, чтобы для „всѣхъ почти" чиселъ u_n выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon';$$

Слѣдствіе. Если пред. $u_n = u$, пред. $v_n = v$ и u не равно нулю, то

$$\text{пред. } \frac{v_n}{u_n} = \frac{v}{u}.$$

Дѣйствительно,

$$\frac{v_n}{u_n} = v_n \cdot \frac{1}{u_n};$$

слѣдовательно, по теоремамъ 2 и 3.

$$\text{пред. } \frac{v_n}{u_n} = v \cdot \frac{1}{u} = \frac{v}{u}.$$

*) Каждое изъ чиселъ u_n не равно нулю.

[11]) Легко показать, что $|a| - |b| \leqq |a - b|$ (знакъ $=$ относится къ тому случаю, когда a и b имѣютъ одинаковые знаки и притомъ $|a| \geqq |b|$), поэтому $|u| - |u_n| \leqq |u - u_n| < \varepsilon < \frac{1}{2}|u|$. Изъ неравенства же $|u| - |u_n| < \frac{1}{2}|u|$ непосредственно выводится неравенство $|u_n| > \frac{1}{2}|u|$.

Прим. редакт.

Доказанныя выше предложенія можно выразить такъ: предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ, предѣлъ разности равенъ разности предѣловъ, предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, предѣлъ частнаго равенъ частному предѣловъ (если только въ послѣднемъ дѣлитель не равенъ нулю). Теоремы относительно суммы и произведенія легко могутъ быть обобщены на случай любого конечнаго числа слагаемыхъ или множителей. Такъ, напримѣръ, изъ равенствъ

$$\text{пред. } u_n = u, \quad \text{пред. } v_n = v, \quad \text{пред. } w_n = w$$

прежде всего вытекаетъ, что

$$\text{пред. } (u_n + v_n) = u + v, \quad \text{пред. } (u_n \cdot v_n) = u \cdot v$$

а затѣмъ

$$\text{пред. } (u_n + v_n + w_n) = \text{пред. } \{u_n + (v_n + w_n)\}$$
$$= u + (v + w) = u + v + w,$$

$$\text{пред. } (u_n \cdot v_n \cdot w_n) = \text{пред. } \{u_n \cdot (v_n \cdot w_n)\}$$
$$= u \cdot (v \cdot w) = u \cdot v \cdot w.$$

§ 13. Объ одномъ свойствѣ раціональныхъ функцій.

Разсмотримъ сначала цѣлую раціональную функцію

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Если рядъ чиселъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ имѣетъ предѣлъ x, т. е. пред. $x_n = x$, то, согласно вышеизложеннымъ теоремамъ,

$$\text{пред } f(x_n) = f(x).$$

Мы называемъ функцію $f(x)$ **непрерывной** для значенія x *), если **всегда** изъ равенства пред. $x_n = x$ вытекаетъ, что пред $f(x_n) = f(x)$ **). Поэтому мы должны сказать, что цѣлыя раціональныя функціи непрерывны повсюду (т. е. для каждаго значенія x)

*) Или въ точкѣ x.

**) Если функціи $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны въ точкѣ x, то и функціи $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны, въ послѣднемъ случаѣ необходимо только, чтобы $g(x)$ было отлично отъ нуля. Это можно вывести изъ теоремъ § 12

Составивъ частное двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій, напримѣръ, функцій $f(x)$ и

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n x + b_n,$$

мы получимъ раціональную функцію $f(x) : g(x)$. Если x есть значеніе, для котораго $g(x)$ не исчезаетъ, то изъ равенства пред. $x_n = x$ слѣдуетъ, что

$$\text{пред } \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Такимъ образомъ, раціональная функція непрерывна для каждаго значенія x, для котораго знаменатель не сводится къ нулю.

Тѣ значенія x, для которыхъ функція не непрерывна или, какъ говорятъ, разрывна) называютъ точками разрыва. Такъ какъ функція $g(x)$ исчезаетъ не больше, чѣмъ при n значеніяхъ x, то цѣлая раціональная функція имѣетъ лишь конечное число точекъ разрыва.

§ 14. Непрерывность функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$.

Изъ опредѣленія $\sin x$ и $\cos x$ легко вывести, что

$$\text{пред. } \sin u_n = 0, \quad \text{пред. } \cos u_n = 1,$$

коль скоро пред $u_n = 0$. Отсюда съ помощью формулъ для $\cos(x - x')$ и $\sin(x - x')$ (стр. 9) выводимъ, что функціи $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны для каждаго значенія x. Въ самомъ дѣлѣ, если пред $x_n = x$, то, положивъ $x_n = x + u_n$, найдемъ, что пред $u_n = 0$. Но упомянутыя формулы даютъ:

$$\sin x_n = \sin x \cos u_n + \cos x \sin u_n,$$

$$\cos x_n = \cos x \cos u_n - \sin x \sin u_n;$$

слѣдовательно,

$$\text{пред. } \sin x_n = \sin x, \quad \text{пред. } \cos x_n = \cos x.$$

Функція $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ также непрерывна повсюду, за исключеніемъ тѣхъ значеній, для которыхъ $\cos x$ исчезаетъ; но $\cos x$ исчезаетъ только для числа $\dfrac{\pi}{2}$, взятаго нечетное число разъ (т. е. для

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ и для $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$). Такимъ образомъ, значенія x, равныя числу $\frac{\pi}{2}$, взятому нечетное число разъ, суть единственныя точки разрыва функціи $\operatorname{tg} x$.

Точно такъ же числа, кратныя π, суть единственныя точки разрыва функціи $\operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Къ вопросу о непрерывности остальныхъ элементарныхъ функцій мы вернемся впослѣдствіи.

§ 15 **Монотонные ряды.**

Рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ называется возрастающимъ, если $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$, т. е. каждый членъ не больше послѣдующаго. Рядъ называется убывающимъ, если $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$, т. е. каждый членъ не меньше послѣдующаго Ряды того и другого вида называются монотонными.

Достаточно разсмотрѣть возрастающіе ряды, ибо, допустивъ, что $u_1, u_2, u_3 \ldots$ есть убывающій рядъ, найдемъ, что рядъ $-u_1, -u_2, -u_3 \ldots$ будетъ возрастающимъ. Поэтому предложенія, доказанныя для возрастающихъ радовъ, можно немедленно перенести на убывающіе.

Пусть будетъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$ возрастающій рядъ, можетъ случиться, что онъ лежитъ въ конечномъ интервалѣ. Это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда можно указать такое число g, которое превосходитъ всѣ значенія u; тогда всѣ значенія u_n заключаются въ интервалѣ (u_1, g). Если такого числа g нѣтъ, то „почти всѣ“ числа u_n превосходятъ всякое (сколь угодно большое) число. Тогда говорятъ, что u_n возрастаетъ безгранично (стремится къ безконечности) съ возрастаніемъ n и пишутъ: пред. $u_n = \infty$.

Займемся тѣмъ случаемъ, когда существуетъ нѣкоторое число g, превосходящее всѣ члены возрастающаго рада $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Рядъ лежитъ тогда въ конечномъ интервалѣ и, слѣдовательно, по теоремѣ Вейерштрасса, имѣетъ точку сгущенія u Ни одно изъ чиселъ u_n не можетъ быть больше этого числа u. Если бы, напримѣръ, было $u_\nu > u$, то мы могли бы выбрать положительное число ε, меньшее, чѣмъ $u_\nu - u$. Въ интервалѣ $(u - \varepsilon, u - \varepsilon)$ оказалось бы лишь конечное число членовъ ряда, такъ какъ u_ν, а тѣмъ болѣе

всѣ послѣдующія значенія u_n, были бы больше, чѣмъ $u + \varepsilon$. Но это противорѣчитъ основному свойству точки сгущенія. Поэтому ни одинъ членъ ряда не можетъ быть больше u. Если бы нашъ рядъ имѣлъ двѣ точки сгущенія u и v ($v > u$), то въ интервалѣ $(v - \varepsilon, v + \varepsilon)$, гдѣ ε положительное число, меньшее чѣмъ $v - u$, не было бы членовъ нашего ряда [12]). Но это невозможно, разъ v есть точка сгущенія. Нашъ рядъ имѣетъ, такимъ образомъ, только одну точку сгущенія u, а въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, пред. $u_n = u$ Этимъ доказано слѣдующее предложеніе:

Монотонный числовой рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$, заключающійся въ конечномъ промежуткѣ, всегда сходится.

Если u есть его предѣлъ, то $u_n \leq u$, въ случаѣ возрастающаго, и $u_n \geq u$, въ случаѣ убывающаго ряда.

§ 16 Примѣры.

1. Пусть a будетъ нѣкоторое положительное число Взявъ нулевую, 1-ую, 2-ую, 3-ью, ... степень числа a, мы получимъ рядъ

$$1, a, a^2, a^3, \ldots$$

Если $a = 1$, то рядъ сведется къ ряду

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

и, значитъ, предѣлъ его будетъ 1.

Если $a < 1$, то нашъ рядъ будетъ убывающимъ, и, такъ какъ онъ заключается въ интервалѣ (0, 1), то онъ сходится Если сверхъ того

$$\text{пред. } a^n = b,$$

то ясно, что и

$$\text{пред. } a^{n-1} = b.$$

Съ другой стороны,

$$\text{пред. } a^n = \text{пред. } (a \cdot a^{n-1}) = a \cdot \text{пред. } a^{n-1};$$

значитъ,

$$b = ab, \text{ или } b(1 - a) = 0$$

Отсюда такъ какъ $a < 1$, слѣдуетъ, что $b = 0$. Этимъ мы доказали, что

$$\text{пред. } a^n = 0. \qquad (0 < a < 1).$$

[12] Ибо $u > v - \varepsilon$ и $u_n < u < v - \varepsilon$.

Если $a > 1$, то a^n возрастаетъ безпредѣльно съ возрастаніемъ n. Если бы существовало такое число g, что всегда выполнялось бы неравенство $a^n < g$, то было бы

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{g},$$

между тѣмъ (какъ мы знаемъ)

$$\text{пред.}\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0.$$

2. Прежде, чѣмъ привести другой примѣръ, докажемъ слѣдующую вспомогательную теорему, которой можно воспользоваться и для перваго примѣра.

Если $1 + h > 0$ и $h \neq 0$ *), то для $n = 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Воспользуемся для доказательства его такъ называемой „полной индукціей“. Сначала убѣдимся въ томъ, что неравенство имѣетъ мѣсто для $n = 2$. Дѣйствительно:

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h.$$

Затѣмъ докажемъ, что, будучи справедливо для n, оно вѣрно для $n + 1$. Умноживъ на $1 + h$ обѣ части неравенства

$$(1 + h)^n > 1 + nh,$$

имѣющаго мѣсто по допущенію, мы получимъ:

$$(1 + h)^{n+1} > (1 + h)(1 + nh) = 1 + (n + 1)h + nh^2,$$

слѣдовательно,

$$(1 + h)^{n+1} > 1 + (n + 1)h.$$

Теперь мы можемъ считать нашу вспомогательную теорему доказанною; такимъ образомъ, неравенство $(1 + h)^n > 1 + nh$ справедливо, если n есть одно изъ чиселъ 2, 3, 4, ..., а число h подчинено условіямъ $1 + h > 0$ и $h \neq 0$.

*) Случай, когда $h = 0$, не требуетъ разбора.

Эти требованія удовлетворяются, если въ указанномъ неравенствѣ положить $b = \frac{1}{n^2}$. Но въ такомъ случаѣ мы получимъ

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

или *)

$$\frac{(n-1)^n (n+1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n},$$

или, наконецъ,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) > \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1},$$

т. е.

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{для } n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Отсюда вытекаетъ, что рядъ

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$$

есть рядъ возрастающій

Положивъ $b = \frac{1}{n^2 - 1}$ въ нашемъ неравенствѣ $(1 + b)^n > 1 + nb$, гдѣ, какъ и до сихъ поръ, n есть одно изъ чиселъ 2, 3, 4, ..., мы удовлетворимъ условіямъ $1 + b > 0$, $b \gtrless 0$ и получимъ

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1},$$

а такъ какъ

$$\frac{n}{n^2 - 1} > \frac{n}{n^2},$$

то

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n},$$

т. е.

$$\frac{n^{2n}}{(n-1)^n (n+1)^n} > \frac{n+1}{n},$$

*) Мы пользуемся здѣсь формулой $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

такимъ образомъ,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (\text{для } n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{2}, \left(1+\frac{1}{2}\right)^{3}, \left(1+\frac{1}{3}\right)^{4}, \ldots$$

есть рядъ убывающій.

Этотъ убывающій рядъ лежитъ въ интервалѣ (0, 4) и поэтому сходится. Обозначимъ предѣлъ его черезъ e:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Далѣе,

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1;$$

значитъ*),

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

такъ какъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$$

Мы имѣемъ теперь возрастающій и убывающій рады, которые оба стремятся къ предѣлу e. Число e играетъ важную роль въ высшемъ анализѣ. Его принимаютъ за основаніе опредѣленной системы логариѳмовъ, носящихъ названіе натуральныхъ логариѳмовъ; такимъ образомъ, натуральный логариѳмъ числа x есть нѣкоторое число y, удовлетворяющее равенству $e^{y} = x$. Лишь впослѣдствіи мы сумѣемъ указать удобный пріемъ для приближеннаго вычисленія e. Теперь намъ извѣстно только то, что e заключается между

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \text{ и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

*) Мы примѣняемъ здѣсь теорему о предѣлѣ частнаго.

Но вычислять эти выраженія для большихъ значеній n неудобно. Съ точностью до шестого десятичнаго знака e выражается числомъ 2,718281.

Вообразимъ себѣ, что капиталъ отданъ въ ростъ по $4^0/_0$, и процентныя деньги присчитываются къ капиталу не по истеченіи года, а уже послѣ $\frac{1}{n}$ части года, и на нихъ, въ свою очередь, начисляются проценты. 1 рубль [13]) по истеченіи $\frac{1}{n}$ года превращается въ $1 \quad \frac{0{,}04}{n}$ рубля, черезъ годъ — въ $\left(1 \quad \frac{1}{25n}\right)^n$ рублей, а черезъ 25 лѣтъ въ

$$\left(1 \quad \frac{1}{25n}\right)^{25n} \text{ рублей.}$$

Если n возрастетъ безпредѣльно, то сумма эта стремится къ e рублямъ. 1 рубль превращается такимъ образомъ черезъ 25 лѣтъ въ e рублей, если мы позволимъ себѣ сказать, что процентныя деньги присоединяются къ капиталу въ каждый моментъ, и на нихъ опять начисляются проценты, считая по $4^0/_0$ годовыхъ. Таково значеніе числа e.

3. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будетъ рядъ положительныхъ чиселъ, которыя не должны быть непремѣнно цѣлыми, и пусть будетъ пред. $a_n = \infty$ *).

Изслѣдуемъ рядъ

$$\left(1 \quad \frac{1}{a_1}\right)^{a_1}, \left(1 \quad \frac{1}{a_2}\right)^{a_2}, \left(1 \quad \frac{1}{a_3}\right)^{a_3}, \ldots$$

Пусть ν_n будетъ наибольшее цѣлое число, которое меньше a_n или равно ему. Въ такомъ случаѣ, принимая во вниманіе неравенство

$$0 < a_n - \nu_n < 1,$$

найдемъ, что и пред. $\nu_n = \infty$. Но

$$1 - \frac{1}{\nu_n - 1} < 1 - \frac{1}{a_n} < 1 - \frac{1}{\nu_n};$$

[13]) Въ подлинникѣ — 1 мараа.

*) Это значитъ, что, каково бы ни было число g, „почти всѣ“ a_n превосходятъ это число.

такимъ образомъ,

$$\left(1 + \frac{1}{\nu_n + 1}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{a_n},$$

а тѣмъ болѣе

$$\left(1 + \frac{1}{\nu_n + 1}\right)^{\nu_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n + 1}$$

Вслѣдствіе того, что выраженія

$$\left(1 + \frac{1}{m + 1}\right)^{m} \text{ и } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

въ которыхъ m есть цѣлое число, стремятся къ предѣлу e при безгранично возрастающемъ m, такъ какъ они соотвѣтственно равны

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m + 1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m}} \text{ и } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

то „почти всѣ“ выражаемыя ими числа содержатся между $e - \epsilon$ и $e + \epsilon$. Принявъ во вниманіе, что пред. $\nu_n = \infty$, найдемъ, что то же вѣрно и для чиселъ

$$\left(1 + \frac{1}{\nu_n - 1}\right)^{\nu_n} \text{ и } \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n + 1}$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ и для чиселъ

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

Но такъ какъ это справедливо для всякаго положительнаго ϵ, то

$$\underset{n = \infty}{\text{пред.}} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

4. Пусть будетъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ рядъ отрицательныхъ чиселъ (изъ которыхъ ни одно не равно -1) и пусть при этомъ пред. $b_n = -\infty$*) Числа b_n могутъ не быть цѣлыми. Изслѣдуемъ рядъ

*) Т. е пред. $(-b_n) = \infty$

$$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)^{b_1},\ \left(1+\frac{1}{b_2}\right)^{b_2},\ \left(1+\frac{1}{b_3}\right)^{b_3},\ \ldots$$

Положивъ $b_n = (1+a_n)$, получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \left(\frac{a_n}{a_n+1}\right)^{-(a_n+1)} = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что пред. $a_n = \infty$, имѣемъ:

$$\text{пред.}_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

Резюмируя все это, мы можемъ сказать, что $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ стремится къ предѣлу e, если ω какимъ бы то ни было образомъ (т. е. пробѣгая какой угодно рядъ значеній) стремится къ ∞ или $-\infty$. Достаточно даже, чтобы ω стремилась къ ∞. Если положить $\frac{1}{\omega} = b$, то b стремится къ нулю (никогда не принимая этого значенія) и

$$\text{пред.}_{b=0}\left((1+b)^{\frac{1}{b}}\right) = e.$$

5. Допустимъ, что $a > 1$ и разсмотримъ рядъ

$$a,\ a^{\frac{1}{2}};\ a^{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

Положимъ

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n.$$

Въ такомъ случаѣ $b_n > 0$ и, согласно неравенству, доказанному въ пунктѣ 2,

$$a = (1+b_n)^n > 1 + nb_n$$

Отсюда имѣемъ

$$b_n < \frac{a-1}{n} \text{ и пред. } b_n = 0$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\text{пред. } a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и пред. $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ 1. слѣдовательно, снова пред. $a^{\frac{1}{n}} = 1$

Въ случаѣ $a > 1$, рядъ a, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, ... убываетъ, въ случаѣ же, когда $0 < a < 1$, онъ возрастаетъ. Если $a = 1$, то рядъ сводится къ 1, 1, 1, ..., и въ этомъ случаѣ пред. $a^{\frac{1}{n}}$ также $= 1$.

Допустимъ теперь, что $a > 1$, и будемъ разумѣть подъ h_1, h_2, h_3... рядъ положительныхъ чиселъ, имѣющихъ предѣломъ 0, такъ что пред. $h_n = 0$. Пусть цѣлое число ν будетъ выбрано подъ условіемъ, чтобы было $a^{\frac{1}{\nu}} < 1 + \varepsilon$. Такъ какъ существуетъ лишь конечное число значеній h_n, удовлетворяющихъ неравенству $h_n \geq \frac{1}{\nu}$, то „почти всѣ“ числа a^{h_n} удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$1 < a^{h_n} < a^{\frac{1}{\nu}} < 1 + \varepsilon.$$

Но это означаетъ, что пред. $a^{h_n} = 1$. Случай $0 < a < 1$ изслѣдуется такъ, какъ указано выше. Если рядъ h_1', h_2', h_3', ..., стремящійся къ нулю, состоитъ исключительно изъ отрицательныхъ членовъ, то мы положимъ $h'_n = -h_n$. Тогда будетъ $h_n > 0$,

$$a^{h'_n} = \frac{1}{a^{h_n}} \text{ и пред. } a^{h'_n} = 1.$$

Мы видимъ, что $a^h (a > 0)$ всегда стремится къ 1, какимъ бы образомъ h ни приближалось къ нулю

Основываясь на этомъ свойствѣ, мы въ состояніи доказать, что функція a^x повсюду непрерывна Если пред. $x_n = x$ и мы положимъ $x_n = x + h_n$, то найдемъ, что пред. $h_n = 0$. Но въ такомъ случаѣ

$$\text{пред. } a^{x_n} = \text{пред. } (a^x \, a^{h_n}) = a^x \text{ пред. } a^{h_n} = a$$

Этимъ доказана непрерывность функціи a^x въ точкѣ x.

Функцію $y = \log_a x$ мы опредѣлили при помощи уравненія $a^y = x$. Мы, по обыкновенію, будемъ предполагать, что основаніе a больше 1. Допустимъ, далѣе, что пред. $x_n = x$, и что всѣ значенія

x_n больше (меньше), чѣмъ x *); слѣдовательно, соотвѣтствующіе имъ логариѳмы y_n будутъ больше (меньше), чѣмъ логариѳмъ y числа x**). Если бы существовало неограниченное число значеній y_n, большихъ чѣмъ $y + \varepsilon$ (меньшихъ, чѣмъ $y - \varepsilon$), то соотвѣтствующія числа x_n были бы больше, чѣмъ $a^{y+\varepsilon}$ (меньше, чѣмъ $a^{y-\varepsilon}$), что невозможно, такъ какъ пред. $x_n = x$ [11]). Такимъ образомъ, функція $\lg_a x$ непрерывна для каждаго положительнаго значенія x.

6. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ будетъ рядъ чиселъ, имѣющій предѣломъ нуль, т. е. пред. $b_n = 0$. Далѣе, пусть будетъ $a > 0$. Построимъ рядъ

$$\frac{a^{b_1} - 1}{b_1}, \quad \frac{a^{b_2} - 1}{b_2}, \quad \frac{a^{b_3} - 1}{b_3}, \quad \ldots \text{***}).$$

Если положить

$$a^{b_n} - 1 = \varepsilon_n,$$

то, какъ мы знаемъ, пред. $\varepsilon_n = 0$. Логариѳмируя, получимъ:

$$b_n \log a = \log(1 + \varepsilon_n);$$

Возьмемъ за основаніе число e, другими словами, будемъ пользоваться натуральными логариѳмами; символъ log будетъ со-

*) Достаточно разсмотрѣть такой рядъ значеній x_n.

**) x и всѣ числа x_n должны быть положительными.

[11]) Пояснимъ это мѣсто. Если бы существовало неограниченное число значеній y_n, превосходящихъ число $y + \varepsilon$, гдѣ ε есть нѣкоторое опредѣленное, положительное число, то существовало бы неограниченное число значеній x_n, удовлетворяющихъ неравенству $x_n = a^{y_n} > a^{y+\varepsilon} = a^y \cdot a^\varepsilon = x \cdot a^\varepsilon = x + h$, гдѣ $h = x(a^\varepsilon - 1)$ есть нѣкоторое также опредѣленное положительное число. Но такъ какъ „почти всѣ“ числа x_n содержатся въ интервалѣ $(x, x + h)$, то только ограниченное количество чиселъ x_n можетъ удовлетворять неравенству $x_n > x + h$, а слѣдовательно, только ограниченное количество чиселъ y_n можетъ удовлетворять неравенству $y_n > y + \varepsilon$. Это значитъ, что „почти всѣ“ числа y_n содержатся въ интервалѣ $(y, y + \varepsilon)$, каково бы ни было положительное число ε, т. е. пред. $y_n = y$, когда пред. $x_n = x$, чѣмъ и доказано, что функція $y = \log_a x$ непрерывна при всякомъ $x > 0$. *Прим. ред.*

***) Мы исключаемъ тотъ случай, когда хотя бы одно число $b_n = 0$. При такомъ условіи числа ε_n также не равны нулю.

образно съ этимъ, обозначать то же, что $\log_a$. Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній имѣемъ:

$$\frac{a^{h_n}-1}{h_n} - \frac{\varepsilon_n \log a}{\log(1+\varepsilon_n)} = \frac{\log a}{\log\left\{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right\}},$$

откуда находимъ:

$$\text{пред}\,\frac{a^{h_n}-1}{h_n} = \log a \frac{1}{\text{пред.}\log\left\{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right\}} = \log a.$$

При этомъ мы основывались на томъ, что выраженіе $(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}$ имѣетъ предѣломъ число e, и что $\log x$ для значенія $x=e$ непрерывенъ.

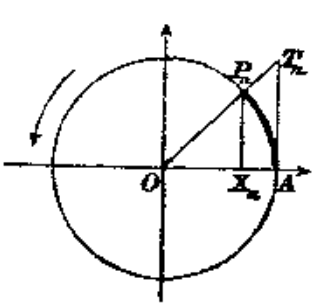
Мы имѣемъ такимъ образомъ слѣдующую теорему:

$\frac{a^h-1}{h}$ $(a>0)$ стремится къ предѣлу $\log a$ (натуральному логарифму числа a), если h какимъ бы то ни было образомъ стремится къ нулю (не принимая самаго значенія 0).

Въ этомъ содержится (во всякомъ случаѣ, мало примѣнимый на практикѣ) способъ вычисленія натуральныхъ логарифмовъ.

7. Пусть $h_1, h_2, h_3, \ldots$ будетъ ралъ рядъ положительныхъ чиселъ, имѣющій предѣломъ 0 Допустимъ, что всѣ эти числа меньше, чѣмъ $\frac{\pi}{2}$, т. е. меньше четверти окружности круга единицы

На фигурѣ 7 представленъ кругъ единицы. Дуга AP_n, начерченная жирной линіей, пусть будетъ равна h_n. Отрѣзокъ X_nP_n въ такомъ случаѣ равенъ $\sin h_n$, отрѣзокъ OX_n равенъ $\cos h_n$, а отрѣзокъ AT_n равенъ $\operatorname{tg} h_n$. Площадь кругового сектора AOP_n относится къ площади π круга единицы, какъ дуга h_n къ окружности 2π этого круга; площадь эта равна слѣдовательно $\frac{1}{2}h_n$. Площадь треугольника OX_nP_n равна $\frac{1}{2}\cos h_n \sin h_n$; площадь треугольника OAT_n равна $\frac{1}{2}\operatorname{tg} h_n$. Такъ какъ круговой секторъ,



Фиг. 7

очевидно, больше перваго и меньше второго изъ этихъ треугольниковъ, то

$$\frac{1}{2}\cos h_n \sin h_n < \frac{1}{2} h_n < \frac{1}{2}\frac{\sin h_n}{\cos h_n}.$$

Дѣля на $\frac{1}{2}\sin h_n$, получимъ:

$$\cos h_n < \frac{h_n}{\sin h_n} < \frac{1}{\cos h_n};$$

значитъ,

$$\frac{1}{\cos h_n} > \frac{\sin h_n}{h_n} > \cos h_n.$$

Но

$$\text{пред. } \cos h_n = 1, \text{ пред } \frac{1}{\cos h_n} = 1,$$

слѣдовательно, и *)

$$\text{пред. } \frac{\sin h_n}{h_n} = 1.$$

Такъ какъ $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, то предположеніе, что всѣ h_n суть положительныя числа, можно опустить, и мы получаемъ слѣдующій результатъ:

$\frac{\sin h}{h}$ стремится къ предѣлу 1, если h какимъ бы то ни было образомъ стремится къ нулю (не принимая значенія 0).

§ 17. О безконечныхъ рядахъ вообще.

Если данъ любой числовой рядъ $u_1, u_2, u_3, \ldots$, то изъ него можно получить новый рядъ, взявъ сначала членъ u_1, затѣмъ $u_1 + u_2$, затѣмъ $u_1 + u_2 + u_3$ и т. д. Если положимъ

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

то новый рядъ будетъ

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

*) Если пред. u_n = пред. w_n = c и v_n всегда заключается между u_n и w_n, то и пред. $v_n = c$. Въ самомъ дѣлѣ, „почти всѣ" u_n и „почти всѣ" w_n лежатъ между $c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon$. Слѣдовательно, это вѣрно и для чиселъ v_n и притомъ для каждаго положительнаго ε. Но это означаетъ, что пред. $v_n = c$.

Можетъ случиться, что этотъ рядъ сходится, т. е. что s_n стремится къ нѣкоторому предѣлу s. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что безконечный рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

есть рядъ сходящійся (сходится), и что s есть его сумма; пишутъ

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Если рядъ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ не сходится, то говорятъ, что безконечный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ есть рядъ расходящійся (расходится).

Суммы $s_1, s_2, s_3, \ldots$ мы будемъ называть частными суммами (Partialsummen) безконечнаго ряда (s_n есть n-ая частная сумма).

Изъ опредѣленія понятія о сходимости непосредственно вытекаютъ слѣдующія предложенія.

1. Если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ сходится, то и рядъ $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \cdots$ также сходится и наоборотъ.

2. Если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ сходится и имѣетъ сумму s, то сходится также рядъ

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

и имѣетъ ту же сумму s. Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что пред. $s_n = s$, слѣдуетъ, что и рядъ

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \ldots$$

имѣетъ предѣлъ s.

3. Если

$$s = u_1 + u_2 - u_3 + \cdots,$$

то

$$as = au_1 + au_2 + au_3 + \cdots$$

4. Для сходимости ряда необходимо, чтобы пред. $u_n = 0$, такъ какъ пред. $s_n = s$, пред. $s_{n+1} = s$ и, слѣдовательно, пред. $(s_n - s_{n-1})$ = пред. $u_n = 0$.

Впрочемъ, условіе пред. $u_n = 0$ есть необходимое условіе сходимости ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, но ни въ коемъ случаѣ не достаточное. Это можно видѣть на примѣрѣ такъ называемаго гармоническаго ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Здѣсь $u_n = \frac{1}{n}$; значитъ, пред. $u_n = 0$. Но не смотря на это, рядъ расходится.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ членовъ

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$ [15])

больше, чѣмъ $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

Суммируя q первыхъ группъ такого рода ($n = 1, 2, \ldots, q$) мы получаемъ такую частную сумму ряда, которая больше $\frac{1}{2} q$, а это число мы можемъ сдѣлать сколь угодно большимъ.

5 Пусть будетъ

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \quad t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

и

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Въ такомъ случаѣ

$$s + t = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, $2n$-ая частная сумма будетъ $s_n + t_n$, а $(2n - 1)$-ая равна $s_n + t_n - v_n$. Обѣ, очевидно, имѣютъ предѣлъ $s + t$.

Точно такъ же

$$s - t = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \ldots$$

§ 18. Примѣры.

1. Геометрическая прогрессія *)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

*) Это суть 2^n послѣдовательныхъ членовъ, слѣдующихъ въ гармоническомъ рядѣ за членомъ $\frac{1}{2^{n-1}}$; каждый изъ нихъ больше числа $\frac{1}{2^n}$.

*) Такъ называютъ и болѣе общій рядъ $a + aq + aq^2 + \ldots$. Геометрическая прогрессія играетъ важную роль въ знаменитомъ софизмѣ Зенона изъ Элеи Ахиллесъ догоняетъ черепаху и бѣжитъ въ 12 разъ быстрѣе ея. Вначалѣ черепаха находится впереди Ахиллеса на разстояніи 1 стадіи. Пока Ахиллесъ пробѣгаетъ это разстояніе, черепаха подвигается впередъ на $\frac{1}{12}$ стадіи. Въ тотъ моментъ, когда Ахиллесъ прошелъ и это разстояніе, черепаха находится впереди его на $\left(\frac{1}{12}\right)^2$ стадіи и т. д. Такимъ образомъ, го-

при $q = 1$ расходится, потому что сумма $s_n = n$ возрастаетъ безпредѣльно. Если $q \gtrless 1$, то, пользуясь равенствами

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1},$$
$$qs_n = \quad q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n,$$

находимъ, что

$$s_n(1 - q) = 1 - q^n,$$

и, такимъ образомъ,

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Въ случаѣ, когда $|q| > 1$, величина $|s_n|$ неограниченно возрастаетъ; слѣдовательно, s_n не стремится къ предѣлу. Если же $q < 1$, то пред. $q^n = 0$ и

$$\text{пред. } s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Когда $q = -1$, то числа $s_2, s_4, s_6, \ldots$ всѣ равны нулю, а каждое изъ чиселъ $s_1, s_3, s_5, \ldots$ равно единицѣ. Рядъ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ имѣетъ, такимъ образомъ, двѣ точки сгущенія.

Геометрическая прогрессія $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ сходится лишь въ томъ случаѣ, когда $q < 1$, при чемъ

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

2. Рядъ, членами котораго попеременно являются положительныя и отрицательныя числа, называется знакопеременнымъ рядомъ. Онъ имѣетъ такой видъ:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,$$

гдѣ всѣ a суть положительныя числа.

Существуютъ извѣстные знакоперемѣнные ряды, сходимость которыхъ легко доказать. Это тѣ ряды, въ которыхъ числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ постоянно убываютъ и стремятся къ предѣлу 0, такъ что

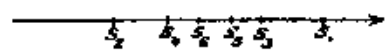
$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \quad \text{и} \quad \text{пред. } a_n = 0.$$

ворить Зенонъ, Ахиллесъ никогда не можетъ догнать черепахи. Въ дѣйствительности онъ ее догонитъ, пройдя путь $s = 1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \ldots$, т. е. $1\frac{1}{11}$ стадіи.

Изобразивъ суммы

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 - a_2,\ s_3 = a_1 - a_2 + a_3, \ldots$$

точками на числовой линіи, мы замѣтимъ, что точки эти расположены, какъ указано на фигурѣ 8; поэтому изъ двухъ рядовъ



Фиг. 8.

$$s_1,\ s_3,\ s_5, \ldots,$$

$$s_2,\ s_4,\ s_6, \ldots$$

первый убываетъ, а второй возрастаетъ, и оба лежатъ въ интервалѣ $(s_2,\ s_1)$. Такимъ образомъ, оба они сходятся и, такъ какъ

$$s_{2n} : \quad s_{2n} - a_{2n},$$

то

$$\text{пред. } s_{2n-1} \quad \text{пред. } s_{2n} + \text{пред. } a_{2n} + 0.$$

и оба имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ s. Рядъ

$$a_1 \quad a_2 + a_3 \quad \ldots$$

поэтому сходится и имѣетъ сумму s. Всѣ значенія s_n, соотвѣтствующія нечетнымъ указателямъ, суть числа, большія чѣмъ s; тѣ же значенія s_n, которыя соотвѣтствуютъ четнымъ указателямъ, будутъ меньше числа s. Такимъ образомъ, если возьмемъ двѣ послѣдовательныя частныя суммы, то s будетъ заключаться между ними.

§ 19. Ряды съ положительными членами.

Если всѣ члены безконечнаго ряда суть положительныя числа, то частныя суммы образуютъ возрастающій рядъ. Такимъ образомъ, достаточно убѣдиться въ томъ, что числа s_n всегда остаются меньше нѣкотораго постояннаго числа g, чтобы увѣриться въ сходимости ряда, ибо s_n имѣетъ въ этомъ случаѣ предѣлъ s.

Если даны два ряда съ положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

и члены перваго ряда меньше соотвѣтствующихъ членовъ второго или равны имъ, т. е.

$$u_1 \leq v_1,\ u_2 \leq v_2,\ u_3 \leq v_3, \ldots,$$

то изъ сходимости второго ряда слѣдуетъ сходимость перваго; если же первый рядъ расходится, то и второй расходится.

Этимъ простымъ замѣчаніемъ мы воспользуемся для доказательства слѣдующаго критерія сходимости, установленнаго д'Аламберомъ (d'Alembert).

Безконечный рядъ съ положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходится, если существуетъ такое число q, которое меньше 1 и въ то же время превосходитъ „почти всѣ" члены ряда

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \dots$$

Если „почти всѣ" члены этого ряда больше 1 или равны ей, то рядъ расходится, такъ какъ пред. u_n отличенъ отъ 0.

Въ первомъ случаѣ выполняются неравенства

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

при чемъ возможно конечное число исключеній.

Если $\nu - 1$ есть наибольшее изъ исключенныхъ значеній указателя, то

$$u_{\nu+1} < qu_\nu, \; u_{\nu+2} < qu_{\nu+1}, \dots;$$

слѣдовательно,

$$u_{\nu+1} < qu_\nu, \; u_{\nu+2} < q^2 u_\nu, \dots .$$

Изъ сходимости ряда $u_\nu + qu_\nu + q^2 u_\nu + \dots$ вытекаетъ, на основаніи вышеупомянутаго замѣчанія, сходимость ряда

$$u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \dots,$$

а, значитъ, и ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

Въ второмъ случаѣ имѣютъ мѣсто, кромѣ конечнаго числа исключеній, неравенства

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1. \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Если $\nu - 1$ опять будетъ наибольшее изъ исключенныхъ значеній указателя, то

$$u_{\nu+1} \geq u_\nu, \; u_{\nu+2} \geq u_{\nu+1}, \dots$$

и, слѣдовательно,

$$u_{\nu+1} \geq u_\nu, \; u_{\nu+2} \geq u_\nu, \dots .$$

Это противорѣчитъ необходимому условію сходимости, выражаемому равенствомъ пред. $u_n = 0$.

Если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ имѣетъ предѣлъ l, то рядъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$; онъ расходится также въ томъ случаѣ, когда пред. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Въ самомъ дѣлѣ, выбравъ столь малое положительное число ε, чтобы въ первомъ случаѣ число $q = l + \varepsilon$ также было меньше 1, и чтобы во второмъ случаѣ число $l - \varepsilon$ тоже было больше 1, мы увидимъ (такъ какъ „почти всѣ" числа $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ лежатъ между $l - \varepsilon$ и $l + \varepsilon$), что, кромѣ конечнаго числа исключеній, въ первомъ случаѣ имѣютъ мѣсто неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. во второмъ же (и третьемъ)—неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Перестановка членовъ.

Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ будутъ два рада съ положительными членами. Пусть оба состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же, но различно расположенныхъ членовъ. Такимъ образомъ, второй рядъ получается изъ перваго путемъ нѣкоторой перестановки членовъ. Допустимъ, что первый рядъ сходится и имѣетъ сумму s. Докажемъ, что второй радъ также сходится и имѣетъ ту же сумму s. Каждой частной суммѣ σ_n рада $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ соотвѣтствуетъ большая сумма $s_{n'}$ въ раду $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ Достаточно выбрать n' столь большимъ, чтобы въ суммѣ $s_{n'}$ заключались всѣ члены $v_1, v_2, \dots, v_n$. Такъ какъ другіе члены суммы $s_{n'}$ (какъ и всѣ вообще члены) суть положительныя числа, то $s_{n'} \geqq \sigma_n$; слѣдовательно, и $s > \sigma_n$. Отсюда видно, что рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ сходится, и, если мы обозначимъ его сумму черезъ σ, то изъ неравенства $s > \sigma_n$ вытекаетъ, что $s \geqq \sigma$ Помѣнявъ роли радовъ, мы найдемъ, что $\sigma \geqq s$; поэтому $s = \sigma$.

Итакъ, мы пришли къ слѣдующей теоремѣ·

Если въ сходящемся ряду съ положительными членами переставить какъ угодно члены, то рядъ останется сходящимся и сумма его будетъ та же.

§ 20. Абсолютно сходящіеся ряды.

Легко убѣдиться въ томъ, что сходимость ряда $|u_1| + u_2| + |u_3| + \ldots$ влечетъ за собой сходимость рада $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ (Теперь не всѣ u суть положительныя числа.)

Дѣйствительно,

$$0 \leqq \frac{|u_n| + u_n}{2} \leqq |u_n|, \qquad 0 \leqq \frac{|u_n| - u_n}{2} \leqq |u_n|.$$

Слѣдовательно, ряды

$$\frac{|u_1| + u_1}{2} + \frac{|u_2| + u_2}{2} + \frac{|u_3| + u_3}{2} + \ldots$$

и

$$\frac{|u_1| - u_1}{2} + \frac{|u_2| - u_2}{2} + \frac{|u_3| - u_3}{2} + \ldots$$

сходятся; значитъ, сходится и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, который есть разность этихъ двухъ рядовъ.

Рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ называютъ абсолютно сходящимся, если сходится рядъ $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$

Перестановка членовъ.

Абсолютно сходящійся рядъ можно, какъ мы сейчасъ замѣтили, всегда представить въ видѣ разности двухъ сходящихся рядовъ съ положительными членами.

Положимъ *)

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \qquad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Въ такомъ случаѣ, какъ намъ извѣстно, ряды $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ и $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ сходятся и не имѣютъ отрицательныхъ членовъ

Далѣе:

$$u_n = v_n - w_n;$$

такимъ образомъ, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ есть разность рядовъ $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ и $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ Перестановка чле-

*) Если угодно, чтобы ни одна изъ величинъ v_n и w_n не исчезала, то можно, напримѣръ, положить

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{|u_n| + u_n}{2}, \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

новъ рада $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ можетъ быть теперь получена путемъ соотвѣтствующей перестановки членовъ въ обоихъ рядахъ $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ и $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ При этомъ рады остаются сходящимися и имѣютъ ту же сумму. То же относится поэтому и къ ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, и мы, такимъ образомъ, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если въ абсолютно сходящемся ряду какъ угодно измѣнить порядокъ членовъ, то рядъ останется сходящимся и сохранитъ ту же сумму.

§ 21. Произведеніе двухъ абсолютно сходящихся рядовъ.

Мы будемъ сначала разсматривать два сходящихся ряда съ положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Сумму n первыхъ членовъ перваго ряда обозначимъ черезъ A_n, второго черезъ B_n; пусть A будетъ сумма перваго, а B сумма второго ряда.

Изслѣдуемъ рядъ

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \ldots;$$

въ немъ заключаются всевозможныя произведенія, составленныя изъ членовъ перваго и второго рада, взятыхъ по одному изъ каждаго ряда. Эти произведенія расположены такъ, что сумма указателей множителей равна сначала 2, затѣмъ 3, затѣмъ 4, . . . Произведенія, въ которыхъ сумма указателей есть $n + 1$, т. е. произведенія a_1b_n, a_2b_{n-1} . . $a_{n-1}b_2$, a_nb_1 записаны въ такомъ порядкѣ, что указатели при a возрастаютъ.

Взявъ частную сумму S_n ряда $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \ldots$, можно выбрать указатель μ такъ, чтобы выполнялось неравенство $S_n < A_\mu B_\mu$. *). Отсюда слѣдуетъ, что

$$S_n < AB.$$

Частныя суммы ряда $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \ldots$, такимъ образомъ, всѣ будутъ меньше, чѣмъ AB, и, значитъ, рядъ сходится. Обозначимъ его сумму черезъ S. Если возьмемъ теперь произведеніе

*) Если μ достаточно велико, то въ развернутомъ произведеніи $A_\mu B_\mu$ навѣрное содержатся всѣ члены суммы S_n.

A_nB_n, то можно выбрать такой указатель ν, чтобы выполнялось неравенство $A_nB_n < S_\nu$ *). Отсюда

$$A_nB_n < S.$$

Неравенство $S_n < AB$ показываетъ, что S (предѣлъ S_n) не можетъ быть больше, чѣмъ AB; неравенство же $A_nB_n < S$ показываетъ, что AB (предѣлъ A_nB_n) не больше S.

Итакъ, $S \quad AB$.

Такъ какъ рядъ $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \ldots$ состоитъ исключительно изъ положительныхъ членовъ, то мы имѣемъ право какъ угодно перемѣщать его члены, при чемъ сумма не измѣнится.

Пусть будутъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

два абсолютно сходящихся ряда, а суммы ихъ пусть будутъ соотвѣтственно s и t. Мы знаемъ, что абсолютно сходящійся радъ всегда можетъ быть представленъ, какъ разность двухъ сходящихся радовъ съ положительными членами.

Пусть $u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$ будетъ разность радовъ

$$a_1 + a_2 + a_3 - \ldots \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 + b_3 - \ldots,$$

имѣющихъ соотвѣтственно суммы A и B, такъ что $u_n \quad a_n - b_n$ $s = A - B$.

Пусть также $v_1 - v_2 + v_3 - \ldots$ будетъ разность рядовъ

$$c_1 + c_2 + c_3 - \ldots \quad \text{и} \quad d_1 + d_2 + d_3 - \ldots,$$

суммы которыхъ суть C и D, такъ что $v_n \quad c_n - d_n$, $t \quad C \quad D$.

По предыдущему имѣемъ:

$$\begin{aligned} AC &\quad a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_1 + \ldots, \\ AD &= a_1d_1 + a_1d_2 + a_2d_1 + \ldots, \\ BC &= b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + \ldots, \\ BD &= b_1d_1 + b_1d_2 + b_2d_1 + \ldots, \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$st = AC + BD - BC - AD \quad u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + \ldots,$$

такъ какъ

$$a_1c_1 + b_1d_1 - b_1c_1 - a_1d_1 = (a_1 - b_1)(c_1 - d_1) \quad u_1v_1$$

и т. д.

*) Если ν достаточно велико, то въ S_ν будутъ заключаться всѣ члены развернутаго произведенія $A_n \; B_n$.

Рядъ, находящійся справа, не только сходится, но и сходится абсолютно. Общій членъ сходящагося ряда, который получается для $AC + AD + BC + BD$, т. е. членъ

$$(a_i c_k + a_i d_k + b_i c_k + b_i d_k),$$

больше, чѣмъ абсолютная величина числа $u_i v_k$, ибо $|u_i| < a_i + b_i$; и $|v_k| < c_k + d_k$.

Поэтому въ ряду $u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + \ldots$ мы имѣемъ право какъ угодно перемѣщать члены, при чемъ радъ не перестаетъ сходиться и сохраняетъ ту же сумму. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, будутъ два абсолютно сходящихся ряда; s—сумма перваго изъ нихъ; t—сумма второго. Если построимъ рядъ, члены котораго суть всевозможныя произведенія $u_i v_k$ *) ($i = 1, 2, 3 \ldots$; $k = 1, 2, 3 \ldots$), то этотъ рядъ абсолютно сходится и имѣетъ сумму st.

Примѣръ. Мы знаемъ, что рядъ

$$1 + q + q^2 + \ldots$$

сходится абсолютно и имѣетъ сумму $\frac{1}{1-q}$, когда $q < 1$, такъ что

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = (1 + q + q^2 + \ldots)(1 + q + q^2 + \ldots)$$

Членами $u_i v_k$ будутъ здѣсь

$$\begin{array}{l} 1.\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots, \\ \quad q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots, \\ \quad\quad q^2,\ q^3,\ \ldots, \\ \quad\quad\quad q^3,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Такимъ образомъ

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots$$

Умноживъ этотъ (абсолютно сходящійся) рядъ еще разъ на $1 + q + q^2 + \ldots$, мы получимъ рядъ для $\left(\frac{1}{1-q}\right)^3$ и т. д.

*) (При чемъ каждое произведеніе войдетъ только по одному разу).

§ 22. Степенные ряды.

Геометрическая прогрессія принадлежитъ къ такъ называемымъ степеннымъ рядамъ. Степеннымъ рядомъ называется рядъ, члены котораго представляютъ послѣдовательныя степени нѣкотораго числа x, при чемъ каждая степень умножена на нѣкоторое число. Рядъ этотъ имѣетъ, такимъ образомъ, слѣдующій видъ:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Величины a_0, a_1, a_2, ... называются коэффиціентами степеннаго рода. Въ геометрической прогрессіи всѣ они имѣютъ одно и то же значеніе.

Если данъ степенной рядъ (т. е. извѣстны его коэффиціенты), то можно поставить вопросъ: для какихъ значеній x рядъ сходится? Значенія эти образуютъ область сходимости ряда.

Существуютъ степенные ряды, которые сходятся для всѣхъ значеній x. Это такъ называемые постоянно сходящіеся степенные ряды.

Таковъ радъ *)

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Обозначимъ члены его черезъ u_1, u_2, u_3, ...; тогда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n}.$$

Слѣдовательно, пред. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, и, на основаніи критерія д'Аламбера (ср. стр. 38) мы можемъ заключить, что рядъ $|u_1| + |u_2| + u_3 + \ldots$ сходится. Итакъ, изслѣдуемый рядъ сходится абсолютно для каждаго значенія x. Сумма его, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, равна e^x.

Существуютъ также степенные ряды, которые сходятся только для значенія $x = 0$ **). Примѣромъ такихъ рядовъ можетъ служить рядъ

$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \ldots$$

*) $n!$ есть произведеніе n чиселъ $1, 2, \ldots, n$.

**) Для значенія $x = 0$ сходятся всякій степенной рядъ.

Здѣсь пред. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$, коль скоро $x \gtrless 0$. Значитъ, не выполняется уже и необходимое условіе сходимости: пред. $u_n = 0$. (Ср. стр. 38).

Если степенной радъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ сходится для нѣкотораго значенія x_0, отличнаго отъ 0, то навѣрное пред. $a_n x_0^n = 0$. Но сходящійся числовой рядъ, какъ намъ извѣстно (ср. стр. 17), можетъ быть заключенъ въ конечный интервалъ. Существуетъ, слѣдовательно, такое число g, что всѣ члены $a_n x_0^n$ по своей абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ g. Напишемъ теперь:

$$a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n.$$

Въ такомъ случаѣ

$$|a_n x^n| < g \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Если $x < x_0$, то рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

сходится, потому что его члены меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящейся геометрической прогрессіи

$$g + g\left|\frac{x}{x_0}\right| + g\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots$$

Такимъ образомъ устанавливается слѣдующее предложеніе:

Если степенной рядъ сходится для значенія $x = x_0 (\gtrless 0)$, то внутри промежутка $(-x_0, x_0)$ онъ сходится абсолютно.

Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ:

Если степенной рядъ для значенія $x_0 = X_0$ расходится, то и внѣ промежутка $(-X_0, X_0)$ онъ нигдѣ не сходится.

Теперь займемся изслѣдованіемъ степеннаго ряда, который сходится не только при $x = 0$, но который вмѣстѣ съ тѣмъ не сходится постоянно. Существуетъ, такимъ образомъ, нѣкоторое отличное отъ 0 число x_0, для котораго рядъ сходится, и другое значеніе X_0, для котораго онъ расходится; пусть r_0 и R_0 будутъ два положительныхъ числа, выбранныхъ такъ, чтобы выполнялись неравенства $r_0 < |x_0|$ и $R_0 > |X_0|$. Въ такомъ случаѣ, по предыдущей теорамѣ, рядъ сходится для значенія $x = r_0$, расходится для значенія $x = R_0$ и $r_0 < R_0$. Раздѣлимъ интервалъ (r_0, R_0) на

2^n равныхъ частей. Среди новыхъ интерваловъ будетъ существовать одинъ и только одинъ (r_n, R_n), подобный интервалу (r_0, R_0), т. е. для $x = r_n$ степенной рядъ будетъ сходиться, а для $x = R_n$ расходиться. Рядъ интерваловъ

$$(r_0, R_0),\ (r_1, R_1),\ (r_2, R_2), \ldots$$

построенъ такимъ образомъ, что всякій послѣдующій содержится въ предыдущемъ (какъ одна изъ двухъ его половинъ); $r_0, r_1, r_2, \ldots$ есть возрастающій, а $R_0, R_1, R_2 \ldots$ есть убывающій рядъ, содержащійся въ интервалѣ (r_0, R_0). Оба ряда поэтому сходятся и имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ ϱ, ибо

$$\text{пред. } (R_n - r_n) = \text{пред. } \frac{R_0 - r_0}{2^n} = 0.$$

Число ϱ обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ:

Внутри интервала $(-\varrho, \varrho)$ степенной рядъ повсюду сходится абсолютно. Въ самомъ дѣлѣ, если x есть значеніе заключающееся внутри интервала $(-\varrho, \varrho)$, то n можно выбрать столь большимъ, что x будетъ заключаться также внутри интервала $(-r_n, r_n)$, ибо пред. $r_n = \varrho$. Такъ какъ для значенія r_n рядъ сходится, то онъ сходится абсолютно внутри интервала $(-r_n, r_n)$, слѣдовательно, и для разсматриваемаго значенія x.

Внѣ интервала $(-\varrho, \varrho)$ степенной рядъ ни для какихъ значеній x не сходится. Дѣйствительно, если x есть нѣкоторое значеніе внѣ интервала $(-\varrho, \varrho)$, то можно n выбрать столь большимъ, чтобы значеніе x также находилось внѣ интервала $(-R_n, R_n)$, ибо пред. $R_n = \varrho$. Такъ какъ рядъ для значенія R_n расходится, то внѣ интервала $(-R_n, R_n)$ онъ нигдѣ не можетъ сходиться и поэтому расходится и для разсматриваемаго значенія x.

Интервалъ $(-\varrho, \varrho)$ называютъ интерваломъ сходимости степеннаго ряда, а ϱ — радіусомъ сходимости.

Если степенной рядъ сходится постоянно, то говорятъ, что радіусъ его сходимости есть ∞. Если же онъ сходится только для $x = 0$, то говорятъ, что радіусъ сходимости есть 0.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

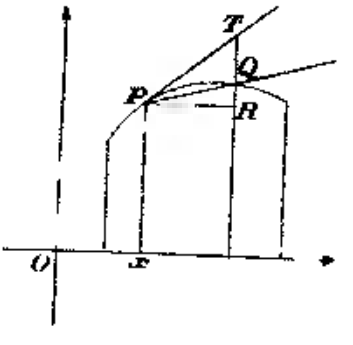
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

§ 23. Отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимой первмѣнной.

Пусть будетъ $y = f(x)$ нѣкоторая функція, опредѣленная для всѣхъ значеній извѣстнаго интервала (a, b). Геометрически она можетъ быть представлена дугою кривой (Фиг.. 9) *).

Возьмемъ нѣкоторое значеніе x изъ интервала (a, b); ему отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе функніи $f(x)$. Дадимъ x положительное или отрицательное приращеніе **) $\Delta x = h$; другими словами, мы замѣнимъ x на $x + h$ и будемъ имѣть вмѣсто значенія $f(x)$ значеніе $f(x + h)$; функція y получаетъ, такимъ образомъ, приращеніе $\Delta y = f(x + h) - f(x)$. Раздѣливъ его на соотвѣтствующее приращеніе независимой перемѣнной $\Delta x = h$, имѣемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$



Фиг 9.

Это выраженіе называется отношеніемъ приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной.

Оно имѣетъ простое геометрическое значеніе. Пусть будутъ P и Q точки кривой, соотвѣтствующія значеніямъ x и $x + h$. Прямая PQ образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ нѣкоторый уголъ φ ***)

*) Мы пользуемся прямоугольной системой координатъ.

**) $x + h$ не должно находиться внѣ интервала (a, b). Вслѣдствіе этого мы должны ограничиться положительными значеніями h для $x = a$ и отрицательными для $x = b$.

***) Смыслъ этого утвержденія таковъ, чтобы стать параллельной прямой PQ, ось x-овъ должна вращаться вокругъ 0 такимъ образомъ, чтобы точка

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Отношеніе приращеній равно, такимъ образомъ, угловому коэффиціенту сѣкущей PQ. Этому отношенію можно дать еще другое толкованіе. Станемъ разсматривать x, какъ время, протекшее отъ нѣкотораго опредѣленнаго начала временъ, и вообразимъ себѣ точку, которая перемѣщается по числовой линіи такимъ образомъ, что въ моментъ x эта точка совпадаетъ съ геометрическимъ изображеніемъ числа $f(x)$, или, коротко говоря, съ точкой $f(x)$. За промежутокъ времени $(x, x+h)$ точка изъ $f(x)$ приходитъ въ $f(x+h)$. Если бы въ теченіе этого времени она двигалась равномѣрно, то скорость ея (отношеніе пройденнаго пути * ко времени) была бы равна

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Эту скорость называютъ средней скоростью движущейся точки за періодъ времени $(x, x+h)$. Она, очевидно, равна отношенію приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной.

§ 24. Производная и дифференціалъ.

Допустимъ, что h стремится къ 0 (т. е. пробѣгаетъ любой **) радъ значеній $h_1, h_2, h_3 \ldots$, при чемъ пред. $h_n = 0$). Можетъ случиться, что при этомъ отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной постоянно [1]) стремится къ одному и тому же предѣлу A, т. е

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = A$$

A (ср. фиг. 4) описала дугу φ (ср стр. 8). Дуга φ опредѣлена только до значеній кратныхъ π, но $\operatorname{tg}\varphi$ имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе, такъ какъ $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg}\varphi$. $\operatorname{tg}\varphi$ называютъ угловымъ коэффиціентомъ прямой PQ.

*) Путь измѣряется такъ же, какъ разстояніе (ср. стр. 3); точно такъ же и время.

**) Мы предполагаемъ, что ни одно изъ чиселъ h_n не равно 0.

[1]) т. е. каковы бы ни были отличныя отъ нуля числа $h_1, h_2, h_3, \ldots$, лишь бы пред. $h_n = 0$. *Прим. ред.*

когда пред. $h_n = 0$. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что для даннаго значенія x функція $f(x)$ имѣетъ производную, и что эта производная равна A.

Итакъ, производная, если она существуетъ, равна предѣлу отношенія $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной при предѣльномъ переходѣ $h \to 0$.

Чтобы указать на связь между производной, функціей $f(x)$ и перемѣнной x, производную обозначаютъ черезъ $f'(x)$. Такимъ образомъ,

$$f'(x) = \text{пред.}_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$ *)

Необходимымъ условіемъ существованія производной для даннаго значенія x является непрерывность функціи $f(x)$ для этого значенія x.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

и если $f'(x)$ существуетъ, то

$$\text{пред.}\left\{f(x+h) - f(x)\right\} = \text{пред.}\, h \cdot \text{пред.}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 \cdot f'(x) = 0.$$

Но условіе это ни въ какомъ случаѣ не достаточно. Напримѣръ, для функціи

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x},$$ **)

пред. $f(h) = f(0) = 0$; слѣдовательно, въ точкѣ $x = 0$ функція непрерывна, а между тѣмъ

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

*) $h \to 0$ подъ знакомъ пред. указываетъ, что h стремится къ предѣлу 0. Если $x \to a$, то h должно быть положительнымъ числомъ, если же $x \to b$, то h — отрицательное число.

**) Для $x = 0$ это выраженіе не имѣетъ смысла. Но мы полагаемъ $f(0) = 0$ [2]).

[2]) Т. е. мы разсматриваемъ функцію $f(x)$, которая имѣетъ значеніе нуль при $x = 0$, и значенія которой при x, отличномъ отъ нуля, опредѣляются равенствомъ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$. *Прим. ред.*

не имѣетъ предѣла. Дѣйствительно, если h пробѣгаетъ рядъ значеній $\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}, \frac{1}{3}\frac{2}{\pi} \ldots$, то $\sin\frac{1}{h}$ будетъ получать значенія, образующія расходящійся рядъ 1, 0, 1, 0 ...

Производная такъ же, какъ и отношеніе приращеній, имѣетъ простое геометрическое значеніе. Если h стремится къ предѣлу нуль, то точка Q стремится къ совпаденію съ точкой P (т. е каждая изъ координатъ точки Q имѣетъ предѣломъ соотвѣтствующую координату точки P). Прямая PQ вращается вокругъ неподвижной точки P такимъ образомъ, что угловой коэффиціентъ прямой стремится къ предѣлу $f'(x)$ Говорятъ, что ея предѣльнымъ положеніемъ служитъ та прямая, проходящая черезъ точку P, угловой коэффиціентъ которой равенъ $f'(x)$ Эту прямую называютъ касательной къ кривой въ точкѣ P. Подобно тому, какъ отношеніе приращеній равно угловому коэффиціенту сѣкущей, такъ производная равна угловому коэффиціенту касательной.

Когда мы подъ x разумѣли время, а $f(x)$ считали абсциссой точки, которая движется по числовой линіи, то отношеніе приращеній равнялось средней скорости движенія за періодъ времени $(x, x + h)$.

Если это отношеніе при предѣльномъ переходѣ $h = 0$ стремится къ нѣкоторому предѣлу, то этотъ предѣлъ разсматриваютъ, какъ скорость движущейся точки въ данный моментъ времени x. Производная $f'(x)$ выражаетъ, такимъ образомъ, скорость [3]).

Дифференціалъ $f(x)$ есть произведеніе производной $f'(x)$ на величину h (приращеніе x) Его обозначаютъ черезъ $df(x)$. Такимъ образомъ,

$$df(x) = f'(x)h.$$

Если замѣнить кривую $y = f(x)$ ея касательной въ точкѣ P, то приращеніе функціи при переходѣ отъ x къ $x + h$ будетъ не $f(x + h) - f(x)$, а $f'(x)h$ или $df(x)$. На фиг. 9 $df(x) = RT$, а $f(x + h) - f(x) = RQ$.

Если воспользоваться другимъ толкованіемъ (x — время и $f(x)$ - абсцисса точки, которая движется вдоль числовой линіи), то мы должны будемъ сказать слѣдующее: если бы точка сохранила навсегда ту скорость $f'(x)$, которую она имѣетъ въ данный

[3]) Въ разсматриваемый моментъ x.

моментъ времени x, то за періодъ времени $(x, x + h)$ она прошла бы путь $f'(x) \cdot h$, а не

$$f(x + h) \quad f(x).$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ основѣ понятія о дифференціалѣ, введеннаго Лейбницемъ, лежитъ идея о замѣнѣ кривой въ окрестности какой-либо ея точки прямою или о замѣнѣ любого движенія въ теченіе нѣкотораго промежутка времени движеніемъ равномѣрнымъ.

Если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, такъ какъ и $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1$.

Для дифференціала получаемъ отсюда равенство

$$dx = h.$$

Дифференціалъ перемѣнной x равенъ самому ея приращенію h. Поэтому въ формулѣ $df(x) = f'(x)\ h$ мы можемъ вмѣсто h написать dx и тогда получимъ

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$f'(x) \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Производная есть, такимъ образомъ, частное двухъ дифференціаловъ (взятыхъ при одномъ и томъ же значеніи h), или отношеніе дифференціаловъ. Поэтому вмѣсто „производная отъ $f(x)$" говорятъ „дифференціальное отношеніе функціи $f(x)$".

Нахожденіе дифференціаловъ или дифференціальныхъ отношеній функціи называютъ дифференцированіемъ (дифференцировать).

§ 25. Дифференцированіе суммы, разности, произведенія и частнаго двухъ функцій.

Предположимъ, что функціи $f(x)$ и $g(x)$ имѣютъ для значенія x производныя $f'(x)$ и $g'(x)$ *)

1. Если $F(x) = f(x) - g(x)$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

*) x есть нѣкоторое значеніе въ промежуткѣ (a, b), въ которомъ функціи $f(x)$ и $g(x)$ опредѣлены.

Предѣлъ правой части при пред. $h = 0$ существуетъ и равенъ $f'(x) + g'(x)$; слѣдовательно, производная $F'(x)$ существуетъ и притомъ

$$F'(x) = f'(x) + g'(x),$$

или, короче,

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Производная суммы равна суммѣ производныхъ. Это предложеніе имѣетъ мѣсто для любого конечнаго числа слагаемыхъ.

2. Точно такъ же можно доказать, что

$$(f - g)' = f' - g'.$$

Производная разности равна разности производныхъ.

3. Пусть будетъ

$$F(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x+h)}{h} - \frac{f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x+h) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x).$$

При h, стремящемся къ нулю, правая часть имѣетъ предѣлъ $f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$ *); поэтому $F'(x)$ существуетъ и

$$F'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x),$$

или, короче,

$$(fg)' = fg' + gf'.$$

Если $g(x)$ сводится къ постоянной c, то $g'(x) = 0$ (такъ какъ даже отношеніе приращеній исчезаетъ). Поэтому найдемъ, что

$$(cf)' = cf',$$

— формула, которую легко доказать непосредственно.

Для произведенія трехъ функцій имѣемъ сначала

$$(fgh)' = f \cdot (gh)' + gh \cdot f',$$

и, такимъ образомъ,

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

---

*) Нужно принять во вниманіе, что пред $f(x+h) - f(x)$, такъ какъ изъ существованія производной $f'(x)$ слѣдуетъ, что функція $f(x)$ непрерывна для значенія x.

Чтобы дифференцировать произведеніе m множителей, нужно умножить производную каждаго изъ нихъ на всѣ остальные и полученныя произведенія сложить.

4. Если $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ и $g(x)$ для значенія x не равно 0 *), то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x) - g(x+h)\,f(x)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\,f(x)}{g(x)\,g(x+h)}.$$

При приближеніи h къ предѣлу нуль правая часть имѣетъ предѣлъ $\frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)\,.\,g(x)}$

Такимъ образомъ, $F(x)$ существуетъ и

$$F'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)},$$

или, короче,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Здѣсь предполагается, что $g(x) \gtrless 0$.

Если выведенныя раньше формулы для

$$(f+g)', \quad (f-g)', \quad (fg)' \quad \text{и} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'$$

*) Въ окрестности точки x можно построить интервалъ $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$ въ которомъ функція $g(x)$ нигдѣ не исчезаетъ. Если бы это оказалось невозможнымъ, то въ каждомъ интервалѣ $\left(x - \frac{1}{n},\ x + \frac{1}{n}\right)$ существовало бы такое значеніе x_n, для котораго $g(x_n) = 0$. Въ такомъ случаѣ, очевидно, пред. $x_n = x$ *) и, вслѣдствіе непрерывности, пред. $g(x_n) = g(x)$, т. е. $0 = g(x)$, что невозможно. Мы заключаемъ h въ интервалъ $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

умножить на dx, то онѣ принимаютъ слѣдующій видъ:

1. $d(f+g) = df + dg,$
2. $d(f-g) = df - dg,$
3. $d(fg) = fdg + gdf,\ d(cf) = cdf,$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$

§ 26. Дифференцированіе раціональныхъ функцій.

Выше мы уже видѣли, какъ производится дифференцированіе произведенія m множителей. Для этого умножаютъ производную каждаго изъ нихъ на всѣ остальные и складываютъ полученныя m произведеній.

Если каждый изъ m множителей равенъ функціи $f(x)$, то получимъ формулу

$$(f^m)' = mf^{m-1}f',$$

или (умножая на dx)

$$d(f^m) = mf^{m-1}df.$$

Въ случаѣ $f = x$ формула принимаетъ видъ

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Теперь мы въ состояніи дифференцировать цѣлую раціональную функцію

$$G(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m.$$

Съ этой цѣлью слѣдуетъ только припомнить, что дифференціалъ суммы конечнаго числа слагаемыхъ равенъ суммѣ дифференціаловъ слагаемыхъ, далѣе, что $d(cf) = cdf$, когда c постоянная величина, и, наконецъ, что дифференціалъ постоянной равенъ нулю.

Зная это, найдемъ, что

$$dG(x) = [ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}]dx,$$

или, если желаемъ получить производную,

$$G'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}.$$

Разсмотримъ теперь раціональную функцію $G(x) : H(x)$, гдѣ

$$H(x) \quad b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Если $H(x) \gtrless 0$, то, по правилу 4 предыдущаго параграфа,

$$\left(\frac{G}{H}\right)' = \frac{HG' - GH'}{G^2},$$

или

$$d\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{HdG - GdH}{G^2},$$

но dG и dH мы умѣемъ найти. Такимъ образомъ, мы умѣемъ дифференцировать всякую раціональную функцію.

Примѣры. 1. Производная отъ $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (m — положительное цѣлое число) будетъ $-mx^{-(m+1)}$, если $x \gtrless 0$.

2. Производная функціи $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ есть

$$y' = \frac{(cx+d)(ax+b)' - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2},$$

или

$$y' = \frac{(cx+d)a - (ax+b)c}{(cx+d)^2},$$

или, наконецъ,

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

При этомъ предполагается, что $cx + d \gtrless 0$.

§ 27. Дифференцированіе функціи a^x *).

Когда $y = a^x$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Но, какъ намъ извѣстно, выраженіе $\frac{a^h - 1}{h}$ имѣетъ предѣломъ $\log a$ (натуральный логариѳмъ a), поэтому

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

Въ частности

$$(e^x)' = e^x.$$

*) a есть положительное число.

Показательная функція e^x имѣетъ, такимъ образомъ, производную, равную ей самой.

§ 28. Дифференцированіе функціи $\log x$.

Если $y = \log x$ *), то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Положивъ $\frac{h}{x} = \bar{h}$, имѣемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log\left\{(1+\bar{h})^{\frac{1}{\bar{h}}}\right\}$$

Такъ какъ h стремится къ 0 вмѣстѣ съ h, то (ср. стр. 29)

$$\text{пред.}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\} = e.$$

Такимъ обрезомъ, (вслѣдствіе непрерывности $\log x$, что было нами доказано на стр. 31) предѣлъ правой части есть $\frac{1}{x}$.

Поэтому

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

$\log_a x$ отличается отъ $\log x$ только постояннымъ множителемъ. А именно:

$$a^{\log_a x} = x,$$

значитъ,

$$\log_a x \cdot \log a = \log x,$$

и

$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x.$$

Поэтому

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

*) x есть положительное число, а $|h|$ — число меньшее, чѣмъ x. **) Логариѳмъ здѣсь берется натуральный (основаніе равно e).

***) Можно ограничиться этими значеніями h, ибо имѣется въ виду предѣльный переходъ h къ нулю. *(Прим. ред.).*

Число $\frac{1}{\log a}$ называется модулемъ системы логариѳмовъ при основаніи a. На этотъ модуль нужно умножить натуральные логариѳмы, чтобы получить логариѳмы, вычисленные при основаніи a.

§ 29. Дифференцированіе тригонометрическихъ функцій.

Имѣемъ:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Но

$$(\cos h - 1)(\cos h + 1) = \cos^2 h - 1 = -\sin^2 h;$$

поэтому

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1+\cos h}.$$

Такъ какъ

$$\text{пред.}\frac{\sin h}{h} = 1, \quad \text{пред.}\frac{\sin h}{1+\cos h} = 0,$$

то

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Такимъ же путемъ находимъ производную отъ $\cos x$. А именно:

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h;$$

вычтемъ

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\cos h - 1}{h},$$

или

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1+\cos h},$$

вслѣдствіе чего

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Найденныя формулы могутъ быть записаны и такимъ образомъ:

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

При дифференцированіи $\operatorname{tg} x$ можно исходить изъ того, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ *).}$$

Такимъ образомъ, находимъ:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Итакъ,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Подобный пріемъ примѣняемъ и къ $\operatorname{cot} x$. Зная, что **)

$$\operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

имѣемъ:

$$(\operatorname{cot} x)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = (1 + \operatorname{cot}^2 x).$$

На этомъ основаніи

$$(\operatorname{cot} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cot}^2 x).$$

Предлагаемъ читателю самому найти производныя функцій $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\sin x}$.

*) $\cos x$ не долженъ быть равенъ 0.

**) $\sin x$ не долженъ равняться нулю.

§ 30. Теорема о среднемъ значеніи.

Лемма. Когда $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ и функція $f(x)$ непрерывна внутри интервала (a, b), а также и для значеній a и b*), то существуетъ такое число c внутри интервала (a, b), что $f(c) = 0$.

Предположимъ, что въ интервалѣ (a, b) функція $f(x)$ нигдѣ не исчезаетъ (т. е. допустимъ противное тому, что мы утверждаемъ). Тогда значеніе $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ будетъ либо положительнымъ, либо отрицательнымъ. Въ первомъ случаѣ роль чиселъ a и b могутъ взять на себя числа $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$; во второмъ эту роль могутъ взять на себя числа $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, такъ какъ $f(a_1) > 0$ и $f(b_1) < 0$. Отъ a_1 и b_1 подобнымъ же образомъ переходимъ къ такимъ двумъ новымъ значеніямъ a_2 и b_2, которыя удовлетворяютъ соотношеніямъ $f(a_2) > 0$ и $f(b_2) < 0$ и т. д. Въ результатѣ получаемъ въ конечномъ интервалѣ (a, b) два монотонныхъ ряда. Каждый изъ нихъ, какъ мы знаемъ (ср. стр. 23), сходится, и оба имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ c, такъ какъ $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$, т. е. пред. $(b_n - a_n) = 0$.

Вслѣдствіе непрерывности функціи $f(x)$

$$\text{пред. } f(a_n) = f(c),$$

и, такъ какъ всѣ значенія $f(a_n)$ суть положительныя числа, то число $f(c)$ не можетъ быть отрицательнымъ. Но значеніе $f(c)$ не можетъ также быть положительнымъ, ибо

$$\text{пред. } f(b_n) = f(c),$$

и всѣ значенія $f(b_n)$ суть отрицательныя числа. Поэтому должно быть $f(c) = 0$, что противорѣчитъ сдѣланному выше допущенію, будто функція $f(x)$ нигдѣ внутри интервала (a, b) не равна 0.

Слѣдствіе. Если $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(\gtrless A)$, C есть число внутри интервала (A, B) и функція $f(x)$ непрерывна внутри

---

*) Выражаясь точно, мы требуемъ, чтобы изъ условій $a \leqq x_n \leqq b$ и пред. $x_n = x$ всегда вытекало соотношеніе пред. $f(x_n) = f(x)$.

интервала (a, b), а также для значеній a и b, то внутри интервала (a, b) существуетъ такое число c, что $f(c) = C$.

Чтобы доказать это слѣдствіе, построимъ функцію $\varphi(x) = \frac{f(x) - C}{A - B}$.

Функція $\varphi(x)$ такъ же, какъ и функція $f(x)$, будетъ непрерывна и, кромѣ того, $\varphi(a) > 0$, $\varphi(b) < 0$. Но при такихъ условіяхъ, на основаніи леммы, существуетъ между a и b такое число c, что $\varphi(c) = 0$, а это значитъ, что $f(c) = C$.

Теорема Ролля. Если функція $f(x)$, непрерывная для значеній a и b*), имѣетъ повсюду внутри интервала (a, b) производную и если $f(a) = f(b)$, то внутри интервала (a, b) существуетъ такое число ξ, что $f'(\xi) = 0$.

Сначала замѣтимъ, что внутри интервала (a, b) функція $f(x)$ также непрерывна. Это вытекаетъ изъ существованія производной. Итакъ, функція $f(x)$ непрерывна во всемъ интервалѣ (a, b). Положимъ $\frac{b-a}{3} = k$ и разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = f(x + k) - f(x);$$

x заключимъ теперь въ интервалъ $(a, a + 2k)$. Функція $\varphi(x)$, очевидно, будетъ непрерывна во всемъ этомъ интервалѣ, включая концы a и $a + 2k$.

Далѣе,

$$\varphi(a) + \varphi(a + k) + \varphi(a + 2k) = f(a + k) - f(a) + f(a + 2k) - f(a + k) + f(b) - f(a + 2k) = f(b) - f(a) = 0,$$

при чемъ возможны слѣдующіе случаи:

1. $\varphi(a) = \varphi(a + k) = \varphi(a + 2k) = 0$;

2. Хоть одно изъ чиселъ $\varphi(a)$, $\varphi(a + k)$, $\varphi(a + 2k)$ отлично отъ нуля

Во второмъ случаѣ между тремя величинами $\varphi(a)$, $\varphi(a + k)$, $\varphi(a + 2k)$ навѣрное имѣется одна положительная и одна отрицательная, такъ какъ

$$\varphi(a) + \varphi(a + k) + \varphi(a + 2k) = 0.$$

*) Точно выражаясь, мы требуемъ, чтобы изъ условій $a \leq x_n \leq b$ и пред. $x_n = a$ или пред. $x_n = b$ всегда соотвѣтственно вытекало, что пред. $f(x_n) = f(a)$ и пред. $f(x_n) = f(b)$.

Но въ такомъ случаѣ, на основаніи нашей леммы, между a и $a + 2k$ существуетъ такое число c, что

$$\varphi(c) = f(c + k) - f(c) = 0.$$

И въ первомъ случаѣ такое число c существуетъ, а именно число $a + k$.

Положимъ $a_1 = c$, $b_1 = c + k$, тогда

$$a < a_1 < b_1 < b \quad \text{и} \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b - a),$$

и интервалъ (a_1, b_1) можетъ играть ту же роль, что интервалъ (a, b), такъ какъ $f(a_1) = f(b_1)$. Повторяя предыдущія разсужденія, мы можемъ перейти отъ интервала (a_1, b_1) къ такому интервалу (a_2, b_2), что

$$a_1 < a_2 < b_2 < b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{1}{3}(b_1 - a_1),$$

и $f(a_2) = f(b_2)$ и т. д.

Возрастающій рядъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и убывающій $b_1, b_2, b_3, \ldots$ сходятся и, въ виду соотношеній

$$\text{пред.}(b_n - a_n) = \text{пред.}\left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a) = 0,$$

имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ ξ, который, очевидно, удовлетворяетъ неравенству

$$a_n < \xi < b_n.$$

Если положимъ $a_n - \xi = b_n$, $b_n - \xi = \bar{b}_n$, то $b_n < 0$ и $\bar{b}_n > 0$. Числители отношеній

$$\frac{f(\xi + b_n) - f(\xi)}{b_n}, \qquad \frac{f(\xi + \bar{b}_n) - f(\xi)}{\bar{b}_n}$$

приращеній функціи къ приращеніямъ независимой перемѣнной равны между собой, потому что $f(a_n) = f(b_n)$, а знаменатели имѣютъ обратные знаки. Вслѣдствіе этого оба отношенія либо равны 0 либо отличаются знаками. Сдѣлаемъ теперь допущеніе, что u_n равно положительному отношенію приращеній, а v_n - отрицательному, а въ томъ случаѣ, когда оба отношенія исчезаютъ, пусть u_n и v_n будутъ равны нулю, тогда ряды

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \quad \text{и} \quad v_1, v_2, v_3, \ldots$$

имѣютъ оба предѣлъ $f'(\xi)$, такъ какъ оба отношенія приращеній стремятся къ значенію $f'(\xi)$. Итакъ

$$\text{пред. } u_n = f'(\xi) \text{ и пред. } v_n = f'(\xi).$$

Въ виду того, что $u_n \geq 0$, значеніе $f'(\xi)$ не можетъ быть отрицательнымъ, а такъ какъ $v_n < 0$, то $f'(\xi)$ не можетъ быть положительнымъ. Слѣдовательно $f'(\xi) \quad 0$.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній мы въ состояніи доказать такъ называемую теорему о среднемъ значеніи. Ее можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Если функція $f(x)$ непрерывна для значеній a и b и повсюду внутри интервала (a, b) имѣетъ производную, то внутри интервала (a, b) существуетъ такое значеніе ξ, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Если вмѣсто функціи $f(x)$ разсматривать функцію

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x,$$

то можно опредѣлить постоянную величину λ такъ, чтобы равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$ выполнялось.

Изъ соотношенія

$$f(a) - \lambda a = f(b) \quad \lambda b$$

непосредственно вытекаетъ, что

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Опредѣливъ величину λ такимъ образомъ, мы можемъ примѣнить къ функціи $\varphi(x)$ теорему Ролля; $\varphi(x)$ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ этой теоремы: функція $\varphi(x)$ непрерывна для значеній a и b (такъ какъ функціи $f(x)$ и λx непрерывны); далѣе, функція $\varphi(x)$ всюду внутри интервала (a, b) имѣетъ производную $f'(x) + \lambda$ и, наконецъ, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Изъ теоремы Ролля слѣдуетъ, что внутри интервала (a, b) существуетъ такое число ξ, что значеніе $\varphi'(\xi) = 0$, слѣдовательно,

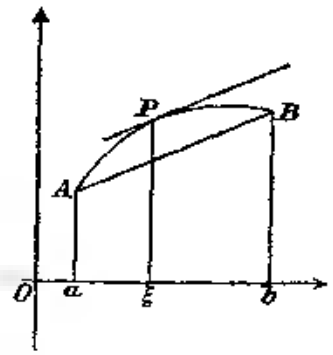
$$f'(\xi) + \lambda = 0, \text{ т. е. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Геометрическое толкованіе теоремы о среднемъ значеніи.

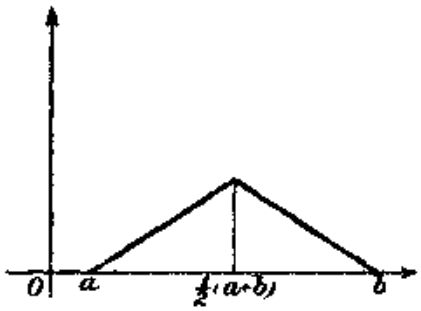
Представимъ себѣ дугу кривой, которая изображаетъ функцію $f(x)$ въ интервалѣ (a, b). Пусть A будетъ начало, B—конецъ этой дуги. Хорда AB имѣетъ угловой коэффиціентъ*)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$f'(\xi)$, какъ мы знаемъ, есть угловой коэффиціентъ касательной къ дугѣ нашей кривой въ точкѣ, имѣющей координаты $x = \xi$, $y = f(\xi)$. Теорема о среднемъ значеніи показываетъ, что эта касательная



Фиг 10.



Фиг 11.

параллельна хордѣ. Теорема о среднемъ значеніи утверждаетъ, такимъ образомъ, что при сдѣланныхъ предположеніяхъ на дугѣ кривой между A и B находится точка P, въ которой касательная параллельна хордѣ AB.

Когда функція $f(x)$ опредѣлена слѣдующими равенствами.

$$f(x) = 0 \quad \text{для значеній} \quad a \leq x < b, \quad f(b) = 1,$$

то повсюду внутри интервала (a, b) производная ея равна нулю. Между тѣмъ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a}$. То, что теорема о среднемъ значеніи здѣсь не оправдывается, объясняется разрывомъ функціи въ точкѣ $x = b$.

Фигура 11 изображаетъ функцію, для которой теорема о среднемъ значеніи также не имѣетъ мѣста и именно потому, что для значенія $x = \frac{a + b}{2}$ производная не существуетъ.

---

*) Угловой коэффиціентъ прямой (ср. стр. 48) равенъ $\operatorname{tg} \varphi$, если прямая образуетъ уголъ φ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ.

Другая запись формулы теоремы о среднемъ значеніи.

Положивъ $a = x$ и $b = x + h$ или $b = x$ и $a = x + h$, можно число ξ, которое заключается между числами x и $x + h$, представить въ формѣ $\xi = x + \vartheta h$, гдѣ $0 < \vartheta < 1$. Формула теоремы о среднемъ значеніи имѣетъ въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Когда $a = x$ и $b = x + h$, то h есть положительное число, когда же $b = x$ и $a = x + h$, то h есть отрицательное число. Формула справедлива, коль скоро функція $f(x)$ непрерывна для значеній x и $x + h$ и имѣетъ производную повсюду внутри интервала $(x, x + h)$.

Формула показываетъ, что отношеніе $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ приращеній принадлежитъ къ числу тѣхъ значеній, которыя производная $f'(x)$ принимаетъ внутри интервала $(x, x + h)$.

Изъ теоремы о среднемъ значеніи вытекаетъ, что функція, постоянно имѣющая производную, равную нулю въ нѣкоторомъ интервалѣ, сводится въ томъ же интервалѣ къ нѣкоторой постоянной величинѣ. Если, въ самомъ дѣлѣ, a и b суть два какихъ-либо значенія изъ этого промежутка, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = 0,$$

значитъ $f(b) = f(a)$. Этотъ результатъ важенъ для интегральнаго исчисленія.

§ 31. Обобщеніе теоремы о среднемъ значеніи.

Теорему о среднемъ значеніи легко обобщить. Пусть $g(x)$ будетъ функція, которая, подобно функціи $f(x)$, непрерывна для значеній a и b и внутри интервала (a, b) повсюду имѣетъ производную и пусть функція $g'(x)$ нигдѣ не равна 0. Въ такомъ случаѣ можно выбрать число λ такимъ, чтобы функція

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

удовлетворяла требованію $\varphi(a) = \varphi(b)$. Изъ соотношенія

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$$

вытекаетъ, что *)

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) \quad g(a)}.$$

Примѣняя къ функціи $\varphi(x)$ теорему Ролля, получаемъ:

$$f'(\xi) \quad \lambda g'(\xi) = 0;$$

значитъ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b).$$

Положивъ $a = x$, $b = x + h$, или $b = x$, $a = x + h$, имѣемъ:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{g(x + h) - g(x)} = \frac{f'(x + \vartheta h)}{g'(x + \vartheta h)}. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

§ 32. Дифференцированіе сложной функціи.

Пусть $F(u)$ будетъ функція отъ u, опредѣленная для значеній $\alpha \leqq u \leqq \beta$; пусть, далѣе, $f(x)$ будетъ функція отъ x, опредѣленная для значеній $a \leqq x \leqq b$. Допустимъ, что во всемъ интервалѣ (a, b) функція $f(x)$ удовлетворяетъ соотношеніямъ

$$\alpha \leqq f(x) \leqq \beta.$$

Если положить

$$u = f(x), \quad v = F(u),$$

то каждому значенію x интервала (a, b) будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое значеніе v. Такимъ образомъ, каждому значенію x при посредствѣ u соотвѣтствуетъ нѣкоторое значеніе y, такъ что v оказывается функціей отъ x. Зависимость эта выражается формулой

$$y = F(f(x)).$$

Функція $F(f(x))$ называютъ сложной функціей.

Попутно сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе:

Если функція $f(x)$ непрерывна для нѣкотораго значенія x и функція $F(u)$ непрерывна для значенія $u = f(x)$, то функція $F(f(x))$ будетъ непрерывна для того же значенія x. Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что пред. $x_n = x$, всегда вытекаетъ, что пред. $u_n =$ пред. $f(x_n) = u$ и

$$\text{пред. } F(f(x_n)) = \text{пред. } F(u_n) = F(u) = F(f(x)).$$

*) Неравенство $g(b) - g(a) \neq 0$ слѣдуетъ изъ ревенства $g(b) - g(a) = -(b - a)g'(\zeta)$, ибо $g'(\zeta) \neq 0$.

Допустимъ теперь, что функція $f(x)$ повсюду въ интервалѣ (a, b) имѣетъ производную $f'(x)$, и что функція $F(u)$ повсюду въ интервалѣ (α, β) также имѣетъ производную $F'(u)$.

Пусть будетъ x нѣкоторое постоянное значеніе, а $x + \Delta x$ какое-либо другое значеніе въ интервалѣ (a, b). При переходѣ отъ x къ $x + \Delta x$ функція $u = f(x)$ получаетъ приращеніе

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x),$$

а функція $y = F(u)$ получаетъ приращеніе

$$\Delta y = F(u + \Delta u) - F(u).$$

По теоремѣ о среднемъ значеніи

$$\Delta y = F'(u + \vartheta \Delta u)\Delta u \text{ *}); \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

слѣдовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(u + \vartheta \Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Пусть Δx стремится къ нулю (оставаясь, однако, постоянно отличнымъ отъ нуля); тогда

$$\text{пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$$

и

$$\text{пред. } \Delta u = \text{пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x = f'(x) \text{ пред. } \Delta x = 0 \text{ **}),$$

а также

$$\text{пред. } \vartheta \Delta u = 0 \quad \text{и} \quad \text{пред. } (u + \vartheta \Delta u) = u.$$

Если же мы введемъ допущеніе, что функція $F'(u)$ непрерывна въ интервалѣ (α, β), то

$$\text{пред. } F'(u + \vartheta \Delta u) = F'(u)$$

и

$$\text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(u)f'(x).$$

Отсюда, умножая на dx, получаемъ дифференціалъ y. Итакъ,

$$dy = F'(u)f'(x)dx,$$

*) Эта формула справедлива и въ томъ случаѣ, когда $\Delta u = 0$.

**) Это намъ уже извѣстно, такъ какъ мы раньше доказали, что изъ существованія $f'(x)$ вытекаетъ непрерывность функціи $f(x)$ для значенія x.

или, принимая во вниманіе, что

$$du = f'(x)dx,$$

имѣемъ

$$dy = F'(u)du.$$

Дифференціалъ функціи $y = F(u)$ выражается точно такъ же, какъ если бы перемѣнная u сама была независимой. Это одно изъ преимуществъ дифференціала по сравненію съ производной.

При доказательствѣ формулы $dy = F'(u)\,du$ мы предполагали, что функція $F'(u)$ непрерывна. Но можно освободиться отъ этого допущенія. Если Δx будетъ пробѣгать рядъ значеній $h_1, h_2, h_3, \ldots$, имѣющій предѣломъ нуль (всѣ h_n не равны нулю), то Δu будетъ пробѣгать рядъ значеній $k_1, k_2, k_3, \ldots$, при чемъ

$$k_n = f(x + h_n) - f(x) = h_n \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}.$$

и потому пред. $k_n = 0$.

При этомъ возможны слѣдующіе случаи:

1. Въ ряду $k_1, k_2, k_3, \ldots$ существуетъ лишь конечное число не исчезающихъ членовъ.

2. Рядъ $k_1, k_2, k_3, \ldots$ содержитъ неограниченное число не исчезающихъ членовъ.

Такъ какъ въ первомъ случаѣ „почти всѣ“ k_n равны нулю, то то же вѣрно и для отношеній

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \cdot \frac{F(u + k_n) - F(u)}{h_n}$$

Поэтому навѣрное

$$\text{пред.} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x) \neq 0$$

и

$$\text{пред.} \frac{F(u + k_n) - F(u)}{h_n} = 0 = F'(u)f'(x).$$

Во второмъ случаѣ, опуская въ ряду $k_1, k_2, k_3, \ldots$ исчезающіе члены, получаемъ рядъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$; пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ будутъ соотвѣтствующіе члены въ ряду $h_1, h_2, h_3, \ldots$ Въ такомъ случаѣ

$$\frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\delta_n} = \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\varkappa_n} \cdot \frac{\varkappa_n}{\delta_n}$$

$$= \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\varkappa_n} \cdot \frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n},$$

и такъ какъ пред. $\delta_n = 0$, пред. $\varkappa_n = 0$ *), то

$$\text{пред.} \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\delta_n} = F'(u)f'(x) \text{ §}).$$

Если въ ряду $k_1, k_2, k_3, \ldots$ существуетъ лишь конечное число исчезающихъ членовъ, то также

$$\text{пред.} \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{h_n} = F'(u)f'(x).$$

Если же, напротивъ того, исчезающіе члены ряда $k_1, k_2, k_3, \ldots$ образуютъ рядъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$, членамъ котораго въ ряду $h_1, h_2, h_3, \ldots$ соотвѣтствуютъ члены $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, то отношенія

$$\frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n} \quad \text{и} \quad \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\delta_n}$$

равны нулю. Поэтому

$$\text{пред.} \frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n} = f'(x) = 0,$$

$$\text{пред.} \frac{F(u + \varkappa_n) - F(u)}{\delta_n} = 0 = F'(u)f'(x).$$

Итакъ, находимъ, что $F'(u)f'(x)$ есть предѣлъ, какъ въ томъ случаѣ, когда h_n пробѣгаетъ рядъ значеній $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, такъ и въ томъ, когда h_n принимаетъ значенія $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \ldots$

Но отсюда вытекаетъ, что **)

$$\text{пред} \frac{F(u + k_n) - F(u)}{h_n} = F'(u)f'(x).$$

§ 33. Примѣры.

1. $y = e^{f(x)}$.

$$dy = e^{f(x)}df(x) = e^{f(x)}f'(x)dx.$$

*) Ср. замѣчанія въ концѣ § 11.

§) Такимъ образомъ пред $\frac{F(u + k_n) - F(u)}{h_n} = F'(u)f'(x)$, когда h_n проходитъ черезъ значенія $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ Согласно замѣчаніямъ въ концѣ § 11, для полнаго доказательства теоремы достаточно показать, что это равенство имѣетъ мѣсто, когда h_n проходитъ черезъ значенія $h_1, h_2, h_3, \ldots$, не заключающіяся въ ряду $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, и когда при томъ число такихъ значеній h_n неограниченно; это и сдѣлано въ слѣдующихъ строкахъ текста. *Прим. ред.*

**) См. замѣчанія въ концѣ § 11.

2. x^μ ($x > 0$ и μ любое число) можетъ быть написано такъ:

$$x^\mu = e^{\mu \log x}$$

Согласно № 1,

$$dx^\mu = e^{\mu \log x} d(\mu \log x) = \mu e^{\mu \log x} \frac{dx}{x},$$

или

$$dx^\mu = \mu x^{\mu - 1} dx.$$

3. $$y = \log f(x), \quad f(x) > 0.$$

$$dy = \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Такъ, напримѣръ,

$$d \log \sin x = \cot x \, dx, \qquad (\sin x > 0)$$

$$d \log \cos x = -\operatorname{tg} x \, dx. \qquad (\cos x > 0)$$

$$d \log \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2dx}{\sin 2x}, \qquad (\operatorname{tg} x > 0)$$

$$d \log \cot x = -\frac{dx}{\sin x \cos x} = -\frac{2dx}{\sin 2x}. \qquad (\cot x > 0)$$

4. $$y = \log (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$dy = \frac{d(x + \sqrt{1 + x^2})}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{dx + d\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

Согласно № 2,

$$d\sqrt{1 + x^2} = d(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 + x^2)$$

$$= \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Окончательно имѣемъ:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

§ 34. Обращеніе непрерывной функціи.

Пусть функція $y = f(x)$ будетъ непрерывна повсюду въ интервалѣ (a, b), включая и концы a и b. Попытаемся построить обратную ей функцію, т. е. станемъ разсматривать x, какъ функцію отъ y. Для того, чтобы это было возможно, требуется, чтобы

функція принимала каждое значеніе не больше одного раза; иначе нѣкоторому значенію y соотвѣтствовало бы нѣсколько значеній x, что противорѣчитъ данному нами опредѣленію понятія о функціи (согласно которому каждому значенію независимой перемѣнной отвѣчаетъ только одно значеніе функціи).

Итакъ, если c и c_1 суть два различныхъ значенія въ промежуткѣ (a, b), то всегда значеніе $f(c) \geqslant f(c_1)$ Выберемъ теперь въ интервалѣ (a, b) три любыхъ значенія x_1, x_2, x_3, находящихся между собой въ соотношеніи

$$x_1 < x_2 < x_3,$$

такъ что x_2 лежитъ между x_1 и x_3. Можно показать, что въ такомъ случаѣ и значеніе $f(x_2)$ заключается между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Дѣйствительно, если бы значеніе $f(x_2)$ падало внѣ интервала $(f\ x_1), f(x_3))$, то существовало бы нѣкоторое значеніе C, которое могло бы находиться какъ между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, такъ и между $f(x_2)$ и $f(x_3)$ [6]). Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то она должна была бы принять это значеніе C для нѣкотораго значенія c (перемѣнной x) между x_1 и x_2, а также для значенія c_1 перемѣнной x между x_2 и x_3 (ср. § 30). Такимъ образомъ, мы имѣли бы $f(c) = f(c_1)$ и $c < c_1$.

Изъ вышеизложенныхъ разсужденій вытекаетъ, что функція $f(x)$ съ возрастаніемъ x отъ a до b либо постоянно возрастаетъ, либо постоянно убываетъ. Для опредѣленности будемъ предполагать, что функція $f(x)$ съ увеличеніемъ x постоянно возрастаетъ *).

Легко убѣдиться въ томъ, что для подобной функціи можно построить обратную. $A = f(a)$ есть наименьшее, а $B = f(b)$ — наибольшее значеніе функціи $f(x)$, и всякое число C между A и B есть также нѣкоторое значеніе функціи (согласно § 30). Значенія $f(x)$ заполняютъ, такимъ образомъ, весь интервалъ (A, B). Вслѣдствіе того, что функція принимаетъ каждое значеніе лишь одинъ разъ, каждому значенію y интервала (A, B) отвѣчаетъ одно и только одно значеніе x интервала (a, b) и притомъ такъ, что $y = f(x)$. Въ интервалѣ (A, B) перемѣнная x есть, такимъ образомъ, нѣкоторая функція отъ y:

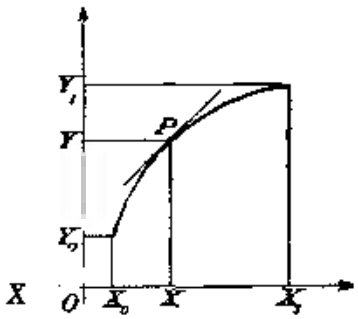
$$x = \varphi(y)$$

---

*) Такъ, напримѣръ, если $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, то всякое число C, содержащееся между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, содержится также между $f(x_2)$ и $f(x_3)$. *Прим. ред.*

*) Если съ увеличеніемъ x функція $f(x)$ убываетъ, то мы будемъ разсматривать функцію $-f(x)$.

Эту функцію называютъ обращеніемъ (обратной функціей) функціи $y = f(x)$ *). Съ возрастаніемъ y значеніе $\varphi(y)$, очевидно, постоянно возрастаетъ. Далѣе, функція $\varphi(y)$ въ интервалѣ (A, B) непрерывна. Дѣйствительно, если въ этомъ интервалѣ имѣемъ рядъ $y_1, y_2, y_3, \ldots$, стремящійся къ y, если, сверхъ того, всѣ члены этого ряда больше (меньше), чѣмъ y **), и при этомъ $x = \varphi(y)$, $x_n = \varphi(y_n)$, то необходимо пред. $x_n = x$. Прежде всего всѣ значенія x_n суть числа, большія (меньшія), чѣмъ x. Если бы существовало неограниченное число значеній x_n, большихъ, чѣмъ $x + \varepsilon$ (меньшихъ, чѣмъ $x - \varepsilon$), то соотвѣтствующія значенія y_n были бы больше, чѣмъ $f(x + \varepsilon)$ (меньше, чѣмъ $f(x - \varepsilon)$), что противорѣчитъ предположенію пред. $y_n = y = f(x)$.



Фиг. 12.

Фигура 12 имѣетъ цѣлью дать наглядное изображеніе связи между обѣими функціями $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$. $\overline{OX} = x$ и $\overline{OY} = y$. Если точка X движется по оси x-овъ въ положительномъ направленіи отъ X_0 до X_1 ($OX_0 = a$, $OX_1 = b$), то точка Y перемѣщается въ положительномъ направленіи по оси y-овъ отъ Y_0 до Y_1 ($\overline{OY}_0 = A$, $\overline{OY}_1 = B$) и наоборотъ. Геометрически обращеніе функціи сводится къ измѣненію ролей обѣихъ координатныхъ осей.

Замѣчаніе. Если функція $f(x)$ имѣетъ повсюду между a и b положительную производную, то $f(x)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ перемѣнной x отъ a до b. Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

вытекаетъ, что для значенія $h > 0$ всегда выполняется неравенство $f(x + h) - f(x) > 0$.

Это утвержденіе остается въ силѣ и въ тѣхъ случаяхъ, когда въ конечномъ числѣ точекъ производная равна нулю или даже совсѣмъ не существуетъ. Если, напримѣръ, $f'(c) = 0$, $a < c < b$, но за исключеніемъ этого значенія повсюду внутри интервала (a, b) выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастаетъ съ увеличеніемъ x отъ a до c и отъ c до b.

*) Точно такъ же функція $y = f(x)$ есть обращеніе функціи $x = \varphi(y)$.

**) Достаточно разсмотрѣть такого рода ряды.

Когда $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ убываетъ.

Если функція $f(x)$ постоянно увеличивается съ возрастаніемъ x отъ a до b, то она нигдѣ въ интервалѣ (a, b) не можетъ имѣть отрицательной производной Именно, для $h > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Но отрицательная величина не можетъ служить предѣломъ положительнаго ряда чиселъ. Поэтому должно удовлетвореться неравенство $f'(x) \geq 0$, если производная $f'(x)$ существуетъ. Точно такъ же должно выполняться неравенство $f'(x) \leq 0$, если $f(x)$ убываетъ съ возрастаніемъ x и если $f'(x)$ существуетъ.

§ 35. Примѣры.

1. $y = e^x$ имѣетъ обратную функцію $x = \log y$.

2. $y = \sin x$ есть функція непрерывная и постоянно возрастающая (отъ -1 до 1) при увеличеніи x отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, обретная функція $x = \varphi(y)$ непрерывна въ интервалѣ $(-1, 1)$ и возрастаетъ съ увеличеніемъ y. Ясно, что $\varphi(y) = \arcsin y$. По отношенію къ функціи

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

обратной функціей является $\operatorname{arc\,tg} y$.

Функція, обратная функціи $y = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$, есть $\arccos y$.

$y = \cot x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ имѣетъ обратную функцію $\operatorname{arc\,cot} y$.

Такимъ образомъ, круговыя функціи суть функціи, обратныя тригонометрическимъ.

3. Функція $y = x^m$, гдѣ m есть одно изъ чиселъ $1, 3, 5, \ldots$, имѣетъ въ любомъ интервалѣ (a, b) обратную функцію, потому что производная $y' = mx^{m-1}$ ($m - 1$ есть четное число), оставаясь положительной, исчезаетъ только для значенія $x = 0$. Обратной функцией является функція $\sqrt[m]{y}$.

Если m есть одно изъ чиселъ $2, 4, 6, \ldots$, то функція $y = x^m$ имѣетъ обратную функцію не въ каждомъ интервалѣ, а только въ такомъ, который не заключаетъ значенія 0. Въ интервалѣ $(0, \infty)$

обратной функціей служитъ функція $x = -y^{\frac{1}{m}}$. въ интервалѣ же $(0, \infty)$ — функція $x = -y^{\frac{1}{m}}$.

§ 36. Дифференцированіе обратныхъ функцій.

Положимъ, что функція $y = f(x)$ непрерывна для значеній $a \leqq x \leqq b$ и постоянно возрастаетъ съ увеличеніемъ x отъ a до b.

Пусть, сверхъ того, всюду въ интервалѣ (a, b) производная $f'(x)$ существуетъ и нигдѣ не обращается въ 0 *).

Если y есть нѣкоторое постоянное число, а $y + k$ нѣкоторое число между A и B, и если, далѣе, $x = \varphi(y)$ и $x + h = \varphi(y + k)$, то

$$\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}},$$

и такъ какъ k стремится къ нулю вмѣстѣ съ h, то

$$\text{пред.}_{k=0} \frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Обратная функція имѣетъ, такимъ образомъ, повсюду между A и B производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказавъ существованіе производной $\varphi'(y)$, можно для дѣйствительнаго вычисленія этой функціи воспользоваться правиломъ. указаннымъ въ § 32. По этому правилу дифференціалъ функціи $y = f(x)$ всегда выражается равенствомъ

$$dy = f'(x)\,dx,$$

безразлично, считаемъ ли мы независимой перемѣнной x или y. Взявъ y за независимую перемѣнную, получимъ изъ этого равенства:

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Съ геометрической точки зрѣнія это соотношеніе между функціями $f'(x)$ и $\varphi'(y)$ есть нѣчто очевидное (ср. фиг. 12). Функціи

*) Согласно замѣчанію въ концѣ § 34, функція $f'(x)$ при такомъ условіи всегда бываетъ положительной.

$f'(x)$ и $\varphi'(y)$ суть угловые коэффиціенты касательной къ кривой въ точкѣ P, и притомъ $f'(x)$ по отношенію къ оси x-овъ, $\varphi'(y)$ по отношенію къ оси y-овъ. Отсюда видно, что функціи эти взаимно-обратны (какъ $\cot\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$).

§ 37. Дифференцированіе круговыхъ функцій.

1. Функція

$$y = \arcsin x$$

имѣетъ обратную функцію $x = \sin y$. Для значеній $-1 < x < 1$

$$dx = \cos y\, dy$$

и

$$dy = \frac{dx}{\cos y};$$

такимъ образомъ,

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Радикалъ нужно брать со знакомъ $+$, такъ какъ (по опредѣленію arc sin) значенія y лежатъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно, выполняется неравенство $\cos y > 0$.

2. Для функціи

$$v = \arccos x$$

обратной функціей будетъ $x = \cos y$. Для значеній $-1 < x < 1$

$$dx = -\sin y\, dv,$$

и

$$dv = -\frac{dx}{\sin y},$$

поэтому

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Здѣсь также нужно взять положительное значеніе радикала, потому что (по опредѣленію $\arccos x$) значенія y лежатъ между 0 и π и, слѣдовательно, выполняется неравенство $\sin y > 0$.

3. Функція

$$v = \operatorname{arc\,tg} x$$

имѣетъ обратную функцію $x = \operatorname{tg} y$. Для каждаго значенія x существуетъ равенство (ср. стр. 58)

$$dx = (1 + \operatorname{tg}^2 y)\, dy;$$

слѣдовательно,

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

т. е.

$$d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

4 Функція

$$y = \operatorname{arc\,cot} x$$

имѣетъ обратную функцію $x = \operatorname{cot} y$. Для каждаго значенія x удовлетворается равенство (ср. стр 58)

$$dx = -(1 + \operatorname{cot}^2 y)\, dy,$$

такъ что

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

т. е.

$$d \operatorname{arc\,cot} x = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

§ 38. **Дифференцированіе степенныхъ рядовъ.**

Степенной рядъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, радіусъ сходимости котораго не равенъ нулю, представляетъ собой внутри интервала сходимости нѣкоторую функцію $f(x)$. Попытаемся теперь найти производную функціи

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Если бы „почти всѣ“ коэффиценты были нулями и, слѣдовательно, функція $f(x)$ представляла бы цѣлую раціональную функцію, то мы имѣли бы

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Докажемъ, что эта формула всегда справедлива. Сначала докажемъ слѣдующее предложеніе:

Степенной рядъ

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

имѣетъ тотъ же радіусъ сходимости, что и рядъ

$$a_0 + a_1x \quad a_2x^2 \quad \ldots$$

Если x есть любое значеніе внутри интервала сходимости ряда $a_0 + a_1x \quad a_2x^2 \quad \ldots$, то можно выбрать внутри этого интервала значеніе x_0, удовлетворяющее неравенству $x < x_0$. Намъ извѣстно (ср. стр. 45), что числа $a_nx_0^n$, равно какъ и числа $a_nx_0^{n-1}$, могутъ быть заключены въ конечный интервалъ $(-G, G)$, такъ что $a_nx_0^{n-1} < G$. Но

$$na_nx^{n-1} = a_nx_0^{n-1} \cdot n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1},$$

слѣдовательно,

$$na_nx^{n-1} < G \cdot nq^{n-1}. \qquad \left(q = \frac{x}{x_0}\right)$$

Такъ какъ $q < 1$, то рядъ (ср. стр. 43)

$$1 - 2q \quad 3q^2 - \ldots$$

сходится а потому сходится и рядъ

$$a_1 + 2a_2x - 3a_3x^2 - \ldots$$

Если x есть нѣкоторое значеніе внутри интервала сходимости ряда $a_1 - 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$, то рядъ

$$a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 - \ldots$$

сходится а, слѣдовательно, сходится и рядъ $a_1x + 2a_2x^2$ $3a_3x^3 \ldots$ и тѣмъ болѣе рядъ $a_0 + a_1x \quad a_2x^2 \quad \ldots$

Рядъ $2 \cdot 1a_2 - 3 \cdot 2a_3x \quad 4 \cdot 3a_4x^2 \quad \ldots$, получаемый изъ рада $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$ тѣмъ же способомъ*), что и этотъ послѣдній изъ $a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots$, имѣетъ тотъ же интервалъ сходимости, что и рядъ $a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots$. То же справедливо и для ряда $3 \cdot 2 \cdot 1a_3 - 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x - 5 \cdot 4 \cdot 3a_5x^2 - \ldots$ и т. д.

Пусть, какъ и до сихъ поръ, x и x_0 будутъ значенія внутри интервала сходимости ряда $a_0 - a_1x + a_2x^2 - \ldots$ и положимъ, что $x < x_0$. Подъ h мы будемъ разумѣть величину, стремящуюся

*) А именно, путемъ почленнаго дифференцированія

къ нулю, но отличную отъ него, и допустимъ *), что выполняется неравенство $x+h < x_0$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a_1\frac{(x+h)-x}{h} + a_2\frac{(x+h)^2-x^2}{h} + a_3\frac{(x+h)^3-x^3}{h} + \ldots$$

Вычтя отсюда выраженіе

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots,$$

получимъ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \varphi(x) - a_2\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h} - 2x\right\} + a_3\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h} - 3x^2\right\} + \ldots$$

По теоремѣ о среднемъ значеніи

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = n\xi_n^{n-1},$$

при чемъ ξ_n заключается между x и $x+h$. Отсюда вытекаетъ, что

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1} = n(\xi_n^{n-1} - x^{n-1}).$$

По теоремѣ о среднемъ значеніи имѣемъ, далѣе,

$$\xi_n^{n-1} - x^{n-1} = (\xi_n - x)(n-1)\xi_n'^{n-2},$$

при чемъ ξ_n' содержится между x и ξ_n, значитъ, навѣрное, между x и $x+h$.

Въ окончательномъ результатѣ

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1} = n(n-1)\xi_n'^{n-2}(\xi_n - x),$$

вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1}\right| < n(n-1)x_0^{n-2}|h|,$$

*) Допущеніе это возможно, ибо пред. $h=0$.

такъ какъ

$$|\xi_n| < |x_0| \quad \text{и} \quad |\xi_n - x| < |h|.$$

Но теперь мы можемъ написать *):

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \varphi(x)\right| < h\,(2\cdot 1\,|a_2| + 3\cdot 2\,|a_3 x_0| + \ldots).$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$\text{пред.}_{h=0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \varphi(x)\right\} = 0$$

или

$$\text{пред.}_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x); \text{ слѣдовательно, } \varphi(x) = f'(x).$$

Такимъ образомъ степенной рядъ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ имѣетъ всюду внутри интервала сходимости производную $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$, которая получается путемъ почленнаго дифференцированія ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

§ 39. Приложенія.

Вычисленіе логарифмовъ.

Допустимъ, что $x < 1$. Функція

$$f(x) = \log(1+x)$$

имѣетъ производную **)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \text{ (ср. стр. 36).}$$

Но этотъ степенной рядъ есть производная ряда

$$F(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Поэтому

$$F'(x) = f'(x), \text{ т. е. } (F(x) - f(x))' = 0.$$

---

*) Для абсолютно сходящагося ряда величина $|u_1 + u_2 + \ldots|$ меньше, чѣмъ сумма $|u_1| + |u_2| + \ldots$ или равна ей.

**) По теоремѣ о дифференцированіи сложной функціи.

Отсюда слѣдуетъ (ср. стр. 64), что

$$F(x) - f(x) = c$$

(c — постоянная величина). Но въ виду равенствъ $F(0) = f(0) = 0$ находимъ, что $c = 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ $F(x) = f(x)$; поэтому

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (x < 1)$$

Такъ какъ $|x| < 1$, то мы можемъ замѣнить въ этомъ ряду x на $-x$. Такимъ путемъ получаемъ

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Вычтя одинъ рядъ изъ другого, найдемъ для выраженія

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

формулу

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right). \qquad (x < 1)$$

Ясно, что въ ней можно положить

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

если n есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... Но въ такомъ случаѣ

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n+2}{2n} = \frac{n+1}{n},$$

и мы находимъ:

$$\log(n+1) - \log n = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right).$$

При $n = 1$ эта формула даетъ

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{9^2} + \ldots\right).$$

Положивъ

$$s_\nu = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2\nu}\frac{1}{9^{\nu-1}}\right),$$

имѣемъ:

$$\log 2 = s_\nu + \varepsilon_\nu,$$

и

$$\varepsilon_\nu < \frac{2}{3(2\nu+1)9^\nu}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right),$$

слѣдовательно,

$$\varepsilon_\nu < \frac{1}{12(2\nu-1)9^{\nu-1}}.$$

Отсюда легко вычислить $\log 2$ съ какой угодно точностью.

Для $n = 4$ наша формула даетъ:

$$\log 5 - \log 4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{9^5} + \cdots\right).$$

Такимъ образомъ,

$$\log 5 = 2\log 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{81} + \frac{1}{5\cdot 81^2} + \cdots\right).$$

Отсюда можно вычислить $\log 5$ съ заданной степенью точности. Мы можемъ вычислить, какъ угодно точно, и $\log 2 + \log 5 = \log 10$, и модуль (ср. стр. 57) обыкновенныхъ логариѳмовъ (т. е. логариѳмовъ, взятыхъ при основаніи 10)

$$M = \frac{1}{\log 10} \quad *)$$

Умноживъ формулу для $\log(n+1) - \log n$ на M и написавъ для краткости Log вмѣсто $\log_{10}$, найдемъ, что

$$\mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}\, n$$

$$= 2M\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right).$$

Съ помощью этой формулы можно вычислить таблицу логариѳмовъ. Если желаемъ найти логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1

*) M выражается числомъ 0,4342944819 ..

до 10^5, то достаточно вычислить логариемы пятизначныхъ чиселъ (такъ какъ, напримѣръ, $\log 13 \quad \log \frac{13000}{10^3} = -3 + \log 13000$). Такимъ образомъ, въ предыдущей формулѣ $n \geqq 10^4$. Положивъ

$$\mathrm{Log}(n \quad 1) \quad \mathrm{Log}\, n \quad \frac{2M}{2n-1} + \delta_n$$

и принимая во вниманіе, что $2M < 1$, имѣемъ:

$$\delta_n < \frac{1}{3(2n-1)^3}\left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^4} - \ldots\right),$$

а такъ какъ

$$1 + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} - \ldots \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)},$$

то

$$\delta_n < \frac{1}{12n(n \quad 1)(2n \quad 1)} < \frac{1}{24n^3} < \frac{1}{10^{13}}.$$

Зная, такимъ образомъ, $\mathrm{Log}\, n$ (какъ это имѣетъ, напримѣръ, мѣсто при $n \quad 10^4$), найдемъ, что

$$\mathrm{Log}(n - 1) = \mathrm{Log}\, n - \frac{2M}{2n-1}$$

съ ошибкой, которая меньше одной единицы тринадцатаго десятичнаго знака.

Нахожденіе числа π.

Пусть опять будетъ $x < 1$. Функція

$$\varphi(x) — \operatorname{arc\,tg} x$$

имѣетъ производную

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 - x^2} = 1 \quad x^2 \quad x^4 \quad \ldots$$

Но этотъ степенной рядъ есть производная отъ функціи

$$\Phi(x) - x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \quad \ldots$$

Поэтому

$$\Phi'(x) = \varphi'(x);$$

слѣдовательно,

$$\Phi(x) - \varphi(x) = c.$$

Но c равно нулю, ибо $\Phi(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$; поэтому

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \qquad (|x| < 1)$$

Положивъ

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots,$$

находимъ, что для значеній $0 < x_n < 1$ выраженіе

$$s - \operatorname{arc\,tg} x_n = 1 - x_n - \frac{1}{3}x_n^3 + \frac{1}{5}x_n^5 - \dots$$

представляетъ собой знакоперемѣнный рядъ, въ которомъ абсолютныя значенія членовъ образуютъ убывающій рядъ. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $f(x) = x^{2\nu+1}$, $g(x) = x^{2\nu-1}$**), мы на основаніи обобщенной теоремы о среднемъ значеніи, доказанной въ § 31, находимъ.

$$\frac{1 - x_n^{2\nu+1}}{1 - x_n^{2\nu-1}} = \frac{f(1) - f(x_n)}{g(1) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

$$= \frac{(2\nu-1)\xi_n^{2\nu}}{(2\nu-1)\xi_n^{2\nu-2}} = \frac{2\nu-1}{2\nu-1}\xi_n^2 < \frac{2\nu+1}{2\nu-1},$$

потому что $x_n < \xi_n < 1$. Отсюда же слѣдуетъ, что

$$1 - x_n^{2\nu+1} < \frac{2\nu+1}{2\nu-1}(1 - x_n^{2\nu-1}).$$

Но мы знаемъ, что въ знакоперемѣнномъ ряду такого рода частныя суммы съ нечетными указателями представляютъ числа бо́льшія, а съ четными указателями — числа, меньшія, чѣмъ сумма ряда. Поэтому

$$1 - x_n - \frac{1}{3}x_n^3 < s - \operatorname{arc\,tg} x_n < 1 - x_n.$$

Станемъ измѣнять x_n такъ, чтобы эта величина стремилась къ 1 (оставаясь постоянно меньше 1); тогда найдемъ, что

*) Рядъ этотъ сходится (ср. стр. 36, № 2).

**) Требованіе, чтобы удовлетворялось неравенство $g'(x) \gtrless 0$, выполняется

$$\text{пред } (s - \operatorname{arc\,tg} x_n) = 0$$

и

$$\text{пред. } \operatorname{arc\,tg} x_n = \operatorname{arc\,tg} 1 = s.$$

Этимъ доказано, что наша формула для $\operatorname{arc\,tg} x$ вѣрна и при $x = 1$ *).

Такъ какъ $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Это рядъ Лейбница для $\frac{\pi}{4}$. Однако, для вычисленія π рядъ этотъ очень мало пригоденъ.

Удобнѣе всего вычислять π, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Изъ формулъ для $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ вытекаетъ, что

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 \pm \operatorname{tg}\varphi_2}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Если же $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$ то по этой формулѣ

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119},$$

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi} = \frac{1}{239}.$$

Отсюда

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Съ другой стороны, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$, и потому

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

*) Подобнымъ же образомъ можно показать, что формула для $\log(1+x)$ справедлива также при $x = 1$, и, слѣдовательно, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

т. е.

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \dots\right).$$

По этой формулѣ π было вычислено съ 707 десятичными знаками. Существуетъ слѣдующее французское четверостишіе, съ помощью котораго можно запомнить первыя 30 цифръ числа π.

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingenieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Замѣнивъ каждое слово числомъ буквъ, которыми оно записано, получимъ первыя 31 цифру числа π; послѣ первой изъ нихъ стоитъ запятая; такимъ образомъ:

$$\pi = 3,\ 14159265358979323846264338327 9\dots$$

Биноміальный рядъ.

Предварительно сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе:

Если два степенныхъ ряда сходятся для значеній $|x| < \varrho$ и имѣютъ одну и ту же сумму, то они тождественны. Въ самомъ дѣлѣ, если для значеній $|x| < \varrho$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots,$$

то и (ср. § 38)

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots$$

Это равенство можно вновь дифференцировать и т. д. Положивъ вездѣ $x = 0$, найдемъ, что вообще $a_n = b_n$.

Пусть, кромѣ того, m будетъ цѣлымъ положительнымъ числомъ. Выполнивъ умноженіе въ равенствѣ

$$(1+x)^m = (1+x)(1+x)\dots(1+x),$$

получимъ результатъ такого вида:

$$(1+x)^m = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots *)$$

Дифференцируя, находимъ:

$$m(1+x)^{m-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

*) Каждое изъ чиселъ $c_{m+1}, c_{m+2}\dots$ равно нулю.

Умноживъ обѣ части на $1 - x$, имѣемъ:

$$m(1+x)^m = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots$$
$$+ c_1x + 2c_2x^2 + \ldots$$

Съ другой же стороны,

$$m(1+x)^m = m + mc_1x + mc_2x^2 + \ldots$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$c_1 = m, \quad 2c_2 = (m-1)c_1, \quad 3c_3 = (m-2)c_2, \ldots;$$

поэтому

$$c_1 = \frac{m}{1}, \quad c_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \quad c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots.$$

Выраженіе

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

обыкновенно обозначаютъ черезъ $\binom{m}{k}$, или $(m)_k$ *).

По предыдущему имѣемъ такимъ образомъ:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots \text{ **)}$$

Эта формула называется формулой бинома для цѣлаго положительнаго показателя.

Намъ извѣстно, что для значеній $x < 1$ существуетъ равенство

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots.$$

Такъ какъ притомъ

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots k} = (-1)^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то можно написать

$$(1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \ldots$$

---

*) Этимъ обозначеніемъ пользуются и въ томъ случаѣ, когда m есть не цѣлое положительное, а какое угодно число.

**) Рядъ обрывается, такъ какъ $(m)_k$ исчезаетъ для значеній $k > m$.

Формула бинома оказывается, такимъ образомъ, вѣрной (въ предположеніи, что $x|<1$) и для показателя -1.

Будемъ теперь искать степенной рядъ, который, будучи умноженъ самъ на себя, далъ бы $1+x$ внутри интервала сходимости рада. Первый членъ такого ряда, очевидно, равенъ ± 1. Можно допустить, что онъ равенъ 1 *). Въ такомъ случаѣ степенной рядъ имѣетъ видъ

$$1+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

и внутри его интервала сходимости должно удовлетворяться равенство

$$(1+a_1x+a_2x^2+\ldots)(1+a_1x+a_2x^2+\ldots)=1+x.$$

Дифференцируя, получимъ:

$$2(1+a_1x+a_2x^2+\ldots)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=1$$

По умноженіи обѣихъ частей на $1+a_1x+a_2x^2+\ldots$, имѣемъ:

$$2(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

т. е.

$$a_1+(2a_2+a_1)x+(3a_3+2a_2)x^2+\ldots=\frac{1}{2}(1+a_1x+a_2x^2+\ldots).$$

Откуда вытекаетъ, что

$$a_1=\frac{1}{2},\quad 2a_2=a_1\left(\frac{1}{2}-1\right),\quad 3a_3=a_2\left(\frac{1}{2}-2\right),\ldots,$$

слѣдовательно,

$$a_1=\left(\frac{1}{2}\right)_1,\quad a_2=\left(\frac{1}{2}\right)_2,\quad a_3=\left(\frac{1}{2}\right)_3,\ldots$$

Въ виду того, что выраженіе

$$\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-n+1}{n}x$$

стремится къ предѣлу x, степенной радъ

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)_1x+\left(\frac{1}{2}\right)_2x^2+\ldots$$

*) Въ противномъ случаѣ умножаемъ рядъ на -1.

имѣетъ радіусъ сходимости 1 (ср. стр. 39). Положивъ

$$f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 x + \left(\frac{1}{2}\right)_2 x^2 \quad \ldots, \quad (-1 < x < 1)$$

имѣемъ, по предыдущему,

$$2f'(x)(1-x) = f(x),$$

или, раздѣливъ на $2(1+x)^{\frac{3}{2}}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} f'(x) - f(x)\tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$1+x$$

т. е.

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right)' = 0,$$

слѣдовательно,

$$f(x) = c(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Постоянная величина c равна 1, потому что для $x = 0$ какъ функція $f(x)$, такъ и функція $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, равна 1. Такимъ образомъ,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 x + \left(\frac{1}{2}\right)_2 x^2 + \ldots$$
$$(-1 < x < 1)$$

Формула бинома вѣрна поэтому и для показателя $\frac{1}{2}$, но только для значеній $x < 1$, а не для значеній $x > 1$.

Пусть μ будетъ произвольное число, отличное отъ чиселъ 0, 1, 2, 3, ... Мы ищемъ степенной рядъ, который для значеній $|x| < 1$ равенъ $(1+x)^\mu$. Онъ имѣетъ видъ $1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$, и мы требуемъ, чтобы для $x < 1$ удовлетворялось равенство

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = (1+x)^\mu.$$

Дифференцируя, получимъ *):

$$b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots = \mu(1+x)^{\mu-1}.$$

*) Ср. правило дифференцированія въ № 2 § 33.

По умноженіи обѣихъ частей на $1 + x$, найдемъ:

$$(1 + x)(b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \ldots) = \mu(1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$b_1 = \binom{\mu}{1}, \quad b_2 = \binom{\mu}{2}, \quad b_3 = \binom{\mu}{3}, \ldots,$$

такъ что выраженіе $\frac{b_nx^n}{b_{n-1}x^{n-1}} = \frac{\mu - n + 1}{n}x$ стремится къ x, и степенной рядъ

$$1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots$$

имѣетъ радіусъ сходимости 1. Положивъ

$$\varphi(x) = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots, \quad (-1 < x < 1)$$

имѣемъ, по предыдущему,

$$(1 + x)\varphi'(x) = \mu\varphi(x).$$

или, умножая на $(1 + x)^{\mu-1}$ и дѣля на $(1 + x)^{2\mu}$,

$$\frac{(1 + x)^\mu\varphi'(x) - \mu(1 + x)^{\mu-1}\varphi(x)}{(1 + x)^{2\mu}} = 0,$$

т. е

$$\left(\frac{\varphi(x)}{(1 + x)^\mu}\right) = 0;$$

такимъ образомъ,

$$\varphi(x) = c(1 + x)^\mu.$$

Но постоянная c равна 1, потому что обѣ функціи $\varphi(x)$ и $(1 + x)^\mu$ равны 1 для значенія $x = 0$. Вслѣдствіе этого

$$(1 + x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots$$

$$(-1 < x < 1).$$

Итакъ, формула бинома справедлива для всякаго показателя, когда $|x| < 1$.

§ 40. Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ.

Допустимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ повсюду въ интервалѣ (a, b) производную $f'(x)$. Можетъ случиться, что функція $f'(x)$ имѣетъ, въ свою очередь, производную въ интервалѣ (a, b). Послѣднюю обозначаютъ символомъ $f''(x)$ и называютъ **второй производной функціи** $f(x)$. Если функція $f''(x)$ имѣетъ въ интервалѣ (a, b) производную, то ее обозначаютъ символомъ $f'''(x)$ и называютъ **третьей производной функціи** $f(x)$ и т. д. Такимъ образомъ,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \qquad \frac{df'(x)}{dx} = f''(x), \qquad \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x), \ldots,$$

или

$$df(x) = f'(x)dx, \quad df'(x) = f''(x)dx, \quad df''(x) = f'''(x)dx, \ldots$$

Когда x есть независимая перемѣнная, то dx разсматриваютъ въ дифференціальномъ исчисленіи, какъ величину, совершенно не зависящую отъ x. Съ этой точки зрѣнія дифференціалъ функціи $df(x)$ есть

$$ddf(x) = df'(x) \cdot dx = f''(x)dx^2$$

Дифференціалъ этого послѣдняго выраженія

$$dddf(x) = df''(x) \cdot dx^2 = f'''(x)dx^3$$

и т. д. Вмѣсто $ddf(x)$, $dddf(x)$, ... пишутъ:

$$d^2f(x), \qquad d^3f(x), \ldots *)$$

и называютъ эти величины 2-мъ, 3-мъ, ... дифференціаломъ функціи $f(x)$. Поэтому n-ый дифференціалъ функціи связанъ съ n-ой ея производной слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} **),$$

т. е. n-ая производная функціи $f(x)$ равна n-му дифференціалу функціи $f(x)$, дѣленному на n-ую степень dx.

---

*) Читаютъ такъ: d второе отъ $f(x)$, d третье отъ $f(x)$...

**) Вмѣсто $(dx)^n$ пишутъ для краткости dx^n.

Допустимъ, что $y = F(u)$ есть функція отъ u въ интервалѣ (α, β) (какъ въ § 32); пусть, далѣе, $u = f(x)$ представляетъ нѣкоторую функцію отъ x въ интервалѣ (a, b), значенія которой лежатъ въ интервалѣ (α, β). Въ такомъ случаѣ можо разсматривать y также, какъ функцію отъ x, а именно $y = F(f(x))$. Вычислимъ послѣдовательные дифференціалы этой функціи. Мы предполагаемъ существованіе производныхъ

$$F'(u),\ F''(u), \ldots$$

повсюду въ интервалѣ (α, β) и производныхъ

$$f'(x),\ f''(x)\ \ldots$$

повсюду въ интервалѣ (a, b), т. е. мы допускаемъ, что существуютъ всѣ производныя различныхъ порядковъ, которыя входятъ въ нашн формулы.

Прежде всего (согласно § 32) имѣемъ:

$$dy = F'(u)du.$$

Отсюда (по правилу дифференцированія произведенія), получаемъ

$$d^2y = dF'(u) \cdot du + F'(u)d^2u$$

а такъ какъ, согласно § 32,

$$dF'(u) = F''(u)du,$$

то

$$d^2y = F''(u)du^2 + F'(u)d^2u.$$

Далѣе мы находимъ, что

$$d^3y = F'''(u)du^3 + 3F''(u)du\,d^2u + F'(u)d^3u$$

и т. д

Только первая изъ этихъ формулъ, т. е. формула $dy = F'(u)du$, имѣетъ такой видъ, какъ если бы перемѣнная u была независимой перемѣнной. Но существуетъ одинъ частный случай, когда всѣ эти формулы выражаются такимъ же образомъ. А именно, когда $u = \lambda x + \mu$ (λ и μ постоянныя величины и $\lambda \gtrless 0$), то $du = \lambda dx$; слѣдовательно,

$$d^2u = 0,\ d^3u = 0, \ldots,$$

такъ что вообще

$$d^n y = F^{(n)}(u)du^n$$

и

$$F^{(n)}(u) = \frac{d^n y}{du^n}.$$

Въ общемъ же случаѣ, при $n > 1$, $F^{(n)}(u)$ отнюдь не равно $d^n y$, дѣленному на du^n.

§ 41. Примѣры.

1. Мы видѣли (въ § 29), что

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

поэтому

$$(\sin x)'' = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)'' = \cos\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

и вообще

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Мы знаемъ, что $(e^x)' = e^x$. Слѣдовательно,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

Функція e^x обладаетъ, такимъ образомъ, особымъ свойствомъ: всѣ ея производныя равны ей самой.

3. Допустимъ, что рядъ

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

сходится, когда $|x - x_0| < \varrho$. Если назовемъ сумму его черезъ $f(x)$, то (ср. § 38) для значеній x внутри интервала $(x_0 - \varrho,\ x_0 + \varrho)$ выполняются равенства:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + 4 \cdot 3c_4(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x - x_0)^2 + \ldots,$$

. . . . . .

Отсюда вытекаетъ, что

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots$$

Такимъ образомъ, при $|x - x_0| < \varrho$ имѣемъ:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

§ 42. Теорема Тэйлора.

Предположимъ, что функція $F(x)$ имѣетъ въ интервалѣ (a, b) производныя

$$F'(x),\ F''(x),\ \dots,\ F^{(n)}(x);$$

пусть x_0 и x_1 будутъ два числа, принадлежащія интервалу (a, b). Поставимъ вопросъ, съ какой точностью величина $F(x_1)$ можетъ быть выражена черезъ

$$F(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{1!} F'(x_0) + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0).$$

Мы займемся, слѣдовательно, разностью

$$R_n = F(x_1) - F(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{1!} F'(x_0) - \dots$$
$$- \frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0).$$

Положивъ

$$\Phi(x) = F(x_1) - F(x) - \frac{x_1 - x}{1!} F'(x) - \dots$$
$$- \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x),$$

найдемъ, что $\Phi(x_0) = R_n$ и $\Phi(x_1) = 0$. Въ силу нашихъ предположеній функція $\Phi(x)$ имѣетъ производную въ интервалѣ (a, b), а именно:

$$\Phi'(x) = -\frac{(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(x).$$

Примѣнимъ теперь обобщенную теорему о среднемъ значеніи (§ 31) къ двумъ функціямъ $\Phi(x)$ и

$$\Psi(x) = (x_1 - x)^p$$

(p есть цѣлое положительное число). Въ силу этой теоремы *)

$$\frac{\Phi(x_1) - \Phi(x_0)}{\Psi(x_1) - \Psi(x_0)} = \frac{\Phi'(\xi)}{\Psi'(\xi)},$$

т. е.

$$\frac{R_n}{(x_1 - x_0)^p} = \frac{(x_1 - \xi)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(\xi).$$

Отсюда, положивъ

$$\xi = x_0 + \vartheta(x_1 - x_0),$$

найдемъ, что

$$R_n = \frac{(x_1 - x_0)^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(x_0 + \vartheta(x_1 - x_0)),$$

при чемъ ϑ заключается между 0 и 1.

Мы можемъ, такимъ образомъ, формулировать слѣдующую теорему. Если функція $F(x)$ имѣетъ n производныхъ въ интервалѣ (a, b) и числа x и $x + h$ принадлежатъ этому интервалу, то справедлива формула **)

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x) + R_n,$$

и

$$R_n = \frac{h^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(x + \vartheta h).$$

При этомъ p есть произвольное цѣлое положительное число и $0 < \vartheta < 1$ [7]).

Если взять $h = dx$, то формула приметъ видъ

$$F(x + dx) = F(x) + \frac{dF(x)}{1!} + \frac{d^2F(x)}{2!} + \ldots + \frac{d^{n-1}F(x)}{(n-1)!} + R_n,$$

и

$$R_n = \frac{(1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p} \{ d^n F(x) \}_{x + \vartheta h} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Символъ $\{ d^n F(x) \}_{x+\vartheta h}$ означаетъ, что нужно найти $d^n F(x)$, а потомъ замѣнить въ немъ x на $x + \vartheta h$.

---

*) Всѣ условія теоремы выполняются.

**) Ее называютъ формулой Тэйлора (Taylor)

[7]) Слѣдуетъ замѣтить, что ϑ зависитъ отъ x и p и отъ функціи F.
Прим. ред.

Положивъ $F(x) = y$ и $F(x + dx) - F(x) = \Delta y$ можно нашу формулу записать короче. Она тогда принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\Delta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}(d^n y)_{x+\vartheta h}$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Для $p = n$ имѣемъ:

$$\Delta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + \frac{(d^n y)_{x+\vartheta h}}{n!},$$

для $p = 1$

$$\Delta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}(d^n y)_{x+\vartheta' h}.$$

Числа ϑ и ϑ' оба заключаются между 0 и 1

§ 43. Рядъ Тэйлора.

Если функція $F(x)$ имѣетъ въ интервалѣ (a, b) производныя всѣхъ порядковъ и значенія x и $x + h$ лежатъ въ интервалѣ (a, b), то можетъ случиться, что въ формулѣ Тэйлора

$$\underset{n}{\text{пред.}}\, R_n = 0.$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ (ср. § 17):

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!}F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \cdots$$

Правую часть этой формулы называютъ рядомъ Тэйлора *) для функціи $F(x)$.

Если для $n = 1, 2, 3, \ldots$ и для всѣхъ значеній ϑ между 0 и 1 удовлетворяется неравенство

$$F^{(n)}(x + \vartheta h) < A$$

(A есть нѣкоторая постоянная), то можно съ увѣренностью утверждать, что величина R_n стремится къ нулю Дѣйствительно, для $p = n$

$$R_n = \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x + \vartheta h);$$

*) При $x = 0$ она носитъ названіе ряда Макъ-Лорена (Mac-Laurin).

слѣдовательно,

$$|R_n| < \frac{b^n}{n!} A.$$

Но мы знаемъ (§ 22), что рядъ

$$1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots$$

сходится. Отсюда вытекаетъ, что

$$\text{пред.} \frac{b^n}{n!} = 0, \text{ и вмѣстѣ съ тѣмъ пред. } R_n = 0.$$

§ 44. Примѣры.

1. Функція e^x и ея производныя (которыя, какъ мы знаемъ, всѣ равны e^x) заключаются между e^a и e^b, если x есть значеніе перемѣнной, принадлежащее интервалу (a, b). Значенія функцій $\sin x$ и $\cos x$ и всѣхъ ихъ производныхъ по абсолютной величинѣ меньше 1. Слѣдовательно, для всѣхъ этихъ функцій справедлива формула

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!}F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \cdots$$

Замѣнивъ x нулемъ и написавъ x вмѣсто h, мы составимъ рядъ Макъ-Лорена

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \cdots$$

и найдемъ, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

2. Функція $y = \log(1+x)$ имѣетъ для значенія $x > -1$ всѣ производныя. Именно, положивъ $1 + x = u$ *), находимъ, что

$$dy = u^{-1}du, \quad d^2y = (-1)u^{-2}du^2;$$

$$d^3y = (-1)(-2)u^{-3}du^3, \ldots.$$

*) Здѣсь имѣемъ разобранный нами въ § 40 случай, когда $u = kx + h$.

слѣдовательно, въ силу равенства $du = dx$,

$$\frac{dy}{dx} = u^{-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (-1)u^{-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = (-1)(-2)u^{-3}, \ldots,$$

$$\frac{d_n y}{dx^n} = (-1)(-2)\ldots(-n+1)u^{-n}.$$

Для значенія $x = 0$ функція $\log(1+x)$ равна нулю, и производныя принимаютъ значенія:

$$1, \quad -1, \quad 1\cdot 2, \quad -1\cdot 2\cdot 3, \ldots, \quad (-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1).$$

Поэтому формула Макъ-Лорена выражается такъ:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1} + R_n, \qquad (x > -1)$$

и

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}x^n}{p(1+\vartheta x)^{n-1}}. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Если $x < 1$, то, положивъ $p = 1$, напишемъ:

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}x^n.$$

Такъ какъ ϑx лежитъ между $-\vartheta$ и ϑ, то

$$\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} \text{ заключается между } \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \text{ и } \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta} = 1,$$

и, слѣдовательно, между 0 и 1. Кромѣ того, очевидно, $1+\vartheta x \geq 1-\vartheta x > 1-x$.

Такимъ образомъ, найдемъ, что

$$R_n < \frac{x^n}{1-x},$$

и

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots.$$

При $x = 1$ положимъ $p = n$. Тогда

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta)^n};$$

значитъ,

$$R_n | < \frac{1}{n},$$

слѣдовательно, пред. R_n 0 и

$$\log 2 \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Всѣ эти результаты намъ уже извѣстны, и мы знаемъ также, что рядъ $\frac{x}{1} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$ не сходится для значеній x 1 и $x > 1$, такъ что формула

$$\log (1 + x) - \frac{\lambda}{1} \quad \frac{\lambda^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

справедлива только для значеній $-1 < x < 1$.

3. Функція $y = (1 + x)^\mu$ имѣетъ для значеній $\lambda > 1$ всѣ производныя *).

Положимъ опять $1 - x = u$; тогда

$$dv = \mu u^{\mu - 1} du, \quad d^2 v = \mu(\mu - 1) u^{\mu-2} du^2, \dots$$

и, въ виду равенства $du = -dx$,

$$\frac{dy}{dx} = -\mu u^{\mu-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mu(\mu - 1) u^{\mu - 2} \dots$$

Для $x = 0$ функціи $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots$ сводятся къ

$$1, \ \mu, \ \mu(\mu - 1) \quad .$$

Формула Макъ-Лорена принимаетъ, такимъ образомъ, видъ

$$(1 + x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 - \dots - \binom{\mu}{n-1} x^{n-1} + R_n.$$

и

$$R_n = \frac{n}{p} \binom{\mu}{n} (1 - \vartheta x)^{\mu - n} (1 - \vartheta)^{n-p} x^n. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Когда $|x| < 1$, то, положивъ $p = 1$, напишемъ:

$$R_n = x(1 + \vartheta x)^{\mu-1} \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x} \right)^{n-1} n \binom{\mu}{n} x^{n-1}.$$

---

*) Случай $\mu = 0$ мы въ дальнѣйшемъ исключаемъ.

Третій множитель заключается, какъ мы знаемъ, между 0 и 1, а второй между 1 и $(1+x)^{\mu-1}$. Если K есть бо́льшее изъ чиселъ 1 и $(1+x)^{\mu-1}$, то имѣемъ неравенство

$$|R_n| < n\binom{\mu}{n} x^{n-1}K.$$

Для значеній $x < 1$ сходится рядъ (стр. 87 и слѣд.)

$$1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots,$$

а вслѣдствіе этого сходится и рядъ

$$\binom{\mu}{1} + 2\binom{\mu}{2}x + 3\binom{\mu}{3}x^2 + \ldots,$$

и потому

$$\text{пред. } n\binom{\mu}{n}x^{n-1} = 0.$$

Поэтому пред. $R_n = 0$, такъ что

$$(1-x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots \quad (|x| < 1).$$

Этотъ выводъ намъ уже извѣстенъ (ср. § 39).

§ 45 **Maxima и minima.**

Говорятъ, что функція $f(x)$ имѣетъ для значенія x_0 максимумъ *) (минимумъ), если можно построить такой заключающій точку x_0 интервалъ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, что значеніе $f(x_0)$ является наибольшимъ (наименьшимъ) значеніемъ функціи въ этомъ интервалѣ. Мы предполагаемъ, что x лежитъ внутри нѣкотораго интервала (a, b), для котораго функція $f(x)$ опредѣлена. Maxima и minima называютъ общимъ именемъ extrema (множественное число отъ extremum).

Если $f(x_0)$ есть extremum и производная $f'(x_0)$ существуетъ, то должно удовлетворяться равенство $f'(x_0) = 0$.

При $h < \varepsilon$ разности

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \text{ и } f(x_0 - h) - f(x_0)$$

*) Или же $f(x_0)$ представляетъ или есть максимумъ (минимумъ).

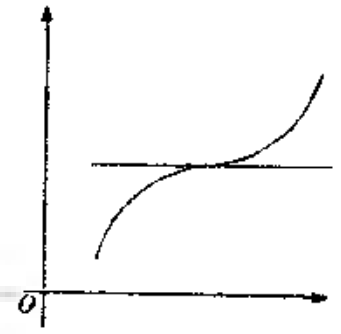
имѣютъ одинаковые знаки, слѣдовательно, отношенія приращеній функціи къ соотвѣтствующимъ приращеніямъ независимой перемѣнной

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

имѣютъ противоположные знаки. Обозначимъ черезъ u то изъ этихъ выраженій, которое оказывается положительнымъ, а черезъ v то, которое оказывается отрицательнымъ; въ такомъ случаѣ

$$\text{пред.}_{h=0} u \quad f'(x_0) \quad \text{и} \quad \text{пред.}_{h=0} v \quad f'(x_0).$$

Изъ перваго равенства можно заключить, что функція $f'(x_0)$ не меньше нуля, а изъ второго, что функція $f'(x_0)$ не больше нуля. Слѣдовательно, $f'(x_0) = 0$ Такимъ образомъ, въ точкѣ $x = x_0$ касательная къ кривой, изображающей функцію $f(x)$, параллельна оси x-овъ. Легко видѣть, что это есть лишь необходимое, но ни въ какомъ случаѣ не достаточное условіе существованія extremum'a (ср. фиг. 13). Если мы знаемъ только то, что $f'(x_0) = 0$, то нельзя еще утверждать, что $f(x_0)$ представляетъ максимумъ или минимумъ На практикѣ этотъ вопросъ обыкновенно рѣшается на основаніи слѣдующей теоремы:



Фиг 13

Если функція $f(x)$ имѣетъ производную повсюду внутри интервала $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, причемъ эта производная положительна для значеній $x < x_0$ и отрицательна для значеній $x > x_0$, то $f(x_0)$ есть максимумъ. Если же производная для значеній $x < x_0$ отрицательна, а для значеній $x > x_0$ положительна, то значеніе $f(x_0)$ есть минимумъ.

Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ функція $f(x)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x отъ $x_0 - \varepsilon$ до x_0; но при дальнѣйшемъ увеличеніи x отъ x_0 до $x_0 + \varepsilon$ функція $f(x)$ убываетъ Во второмъ случаѣ дѣло происходитъ какъ разъ наоборотъ

§ 46. Наибольшее и наименьшее значеніе функціи въ конечномъ интервалѣ.

Пусть функція $f(x)$ будетъ непрерывна для всѣхъ значеній $a \leqq x \leqq b$. Интервалъ (α, β), заключающійся въ интервалѣ (a, b).

мы будемъ называть особеннымъ частнымъ интерваломъ интервала (a, b), если въ интервалѣ (a, b) нѣтъ такого значенія функціи, которое превосходило бы всѣ значенія функціи въ интервалѣ (α, β).

Если разбить интервалъ (a, b) при помощи числа $c = \frac{a+b}{2}$ на два интервала (a, c) и (c, b), то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ этихъ частныхъ интерваловъ будетъ особеннымъ. Если, въ самомъ дѣлѣ, допустить, что ни одинъ изъ нихъ не будетъ особеннымъ, то можно будетъ найти два числа x_1 и x_2 въ интервалѣ (a, b), удовлетворяющихъ такимъ соотношеніямъ:

$$\text{для } a \leqq x \leqq c \qquad f(x) < f(x_1),^{8})$$
$$\text{для } c \leqq x \leqq b \qquad f(x) < f(x_2).$$

Одно изъ значеній $f(x_1)$, $f(x_2)$ функціи $f(x)$ было бы въ такомъ случаѣ больше всѣхъ значеній этой функціи въ интервалѣ (a, b), что, очевидно, представляетъ противорѣчіе. Поэтому въ интервалѣ (a, b) навѣрное существуетъ особенная половина (a_1, b_1), въ интервалѣ (a_1, b_1), въ свою очередь, имѣется особенная половина (a_2, b_2) и т. д. Если ξ есть общій предѣлъ чисель a_n и b_n, то можно показать, что всякое значеніе функціи въ интервалѣ (a, b) не больше $f(\xi)$.

Если бы, напримѣръ, выполнялось неравенство $f(\xi_0) > f(\xi)$, то существовала бы

въ интервалѣ (a_1, b_1) точка ξ_1, удовлетворяющая соотношенію
$$f(\xi_1) \geqq f(\xi_0).^{9})$$
въ интервалѣ (a_2, b_2) точка ξ_2, удовлетворяющая соотношенію
$$f(\xi_2) \geqq f(\xi_1),$$
въ интервалѣ (a_3, b_3) точка ξ_3, удовлетворяющая соотношенію
$$f(\xi_3) \geqq f(\xi_2),$$

[8]) Такъ какъ интервалъ (a, c) не есть особенный частный интервалъ интервала (a, b), то хоть одно значеніе $f(x_1)$ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) будетъ больше любого значенія $f(x)$ нашей функціи въ интервалѣ (a, c), т. е. при нѣкоторомъ $x = x_1$, содержащемся въ интервалѣ (a, b), и при всѣхъ значеніяхъ x, содержащихся въ интервалѣ (a, c), будетъ выполняться неравенство $f(x) < f(x_1)$. *Прим. ред.*

[9]) Въ самомъ дѣлѣ, $f(\xi_0)$ есть одно изъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b). Это значеніе не можетъ быть больше всѣхъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a_1, b_1), ибо (a_1, b_1) есть особенный частный интервалъ

и т. д. Такъ какъ пред. $\xi_n = \xi$, то, въ виду непрерывности функціи,

$$\text{пред. } f(\xi_n) = f(\xi).$$

Но, съ другой стороны, пред. $f(\xi_n) \geqq f(\xi_0) > f(\xi)$

Примѣняя то же разсужденіе къ функціи $-f(x)$, мы получимъ нѣкоторое значеніе $f(\xi)$, которое является наименьшимъ значеніемъ функціи въ интервалѣ (a, b).

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ теоремѣ, впервые найденной Вейерштрассомъ.

Если функція $f(x)$ непрерывна для всѣхъ значеній $a \leq x \leq b$, то въ интервалѣ (a, b) существуетъ такое число ξ и такое число $\bar{\xi}$, что $f(\xi)$ является наибольшимъ, а $f(\bar{\xi})$ наименьшимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b).

Когда ξ лежитъ внутри интервала (a, b) и въ точкѣ ξ существуетъ производная $f'(x)$, то необходимо $f'(\xi) = 0$, ибо изъ двухъ отношеній

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \qquad (h > 0),$$

одно u больше нуля или равно ему, а другое v меньше нуля или равно ему. Когда h стремится къ нулю, то какъ пред. $u = f'(\xi)$, такъ и пред. $v = f'(\xi)$; поэтому число $f'(\xi)$ не можетъ быть ни положительнымъ ни отрицательнымъ. Если значеніе ξ находится внутри интервала (a, b) и сверхъ того въ точкѣ ξ существуетъ $f'(x)$, то $f'(\xi) = 0$

Отсюда можно вывести новое доказательство теоремы Ролля (§ 30). Дѣйствительно, изъ условій этой теоремы слѣдуетъ, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ двухъ значеній ξ и $\bar{\xi}$ должно находиться внутри интервала (a, b).

§ 47. Примѣры.

1 Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ будутъ заданныя числа. Мы желаемъ опредѣлить значеніе перемѣнной x, для котораго функція

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

интервала (a, b); поэтому въ интервалѣ (a_1, b_1) имѣется хоть одно значеніе ξ перемѣнной x, удовлетворяющее соотношенію $f(\xi_1) = f(\xi_0)$ *Прим. ред.*

получаетъ наименьшее значеніе. Находимъ производную

$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n) =$$
$$= 2n\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right).$$

При этомъ

$$f'(x) < 0 \text{ для значеній } x < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

напротивъ,

$$f'(x) > 0 \text{ для значеній } x > \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что функція $f(x)$ для значенія

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

имѣетъ минимумъ и притомъ наименьшее значеніе.

2. Требуется построить цилиндрическій сосудъ (открытый сверху), который имѣлъ бы наибольшій объемъ при заданной поверхности.

Допустимъ, что r есть радіусъ основанія, а h высота сосуда. Въ такомъ случаѣ поверхность равна

$$\pi r^2 + 2\pi rh = S,$$

а объемъ равенъ

$$V = \pi r^2 h.$$

Такъ какъ изъ перваго равенства слѣдуетъ, что

$$\pi rh = \frac{S - \pi r^2}{2},$$

то

$$V = \frac{Sr - \pi r^3}{2}.$$

Какъ показываетъ равенство для S, значенія перемѣнной величины r ограничиваются интерваломъ $\left(0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$. Выраженіе

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S - 3\pi r^2}{2}$$

будетъ положительнымъ для значеній $0 < r < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ и отрицательнымъ для значеній $\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Такимъ образомъ, функція V имѣетъ максимумъ и вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшее значеніе для значенія $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Если вычислить b, то найдемъ, что $b = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Итакъ, $b = r$, т. е. высота сосуда должна быть равна радіусу основанія.

§ 48. Дифференцированіе функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Ограничимся только случаемъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, которыя мы будемъ разсматривать, какъ абсциссу и ординату въ прямоугольной системѣ координатъ.

Если дѣло идетъ о функціи $z = f(x, y)$, то нѣтъ необходимости, чтобы она была опредѣлена для всѣхъ системъ значеній (x, y); достаточно, если она опредѣлена лишь для нѣкотораго комплекса такихъ системъ значеній, или, выражаясь геометрически, для извѣстной системы точекъ (ср. стр. 10). Эта система можетъ, напримѣръ, состоять изъ всѣхъ точекъ нѣкотораго прямоугольника, стороны котораго параллельны осямъ координатъ; въ такомъ случаѣ перемѣнныя x и y удовлетворяютъ требованіямъ

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Такой комплексъ точекъ мы будемъ называть интерваломъ (двумѣрнымъ) и обозначать символомъ $(a, b; c, d)$.

Допустимъ теперь, что функція $f(x, y)$ опредѣлена въ интервалѣ $(a, b; c, d)$ *). Тогда, при $c \leq y_0 < d$ выраженіе

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

представляетъ функцію отъ x въ интервалѣ (a, b), а при $a \leq x_0 \leq b$ выраженіе

$$\psi(y) = f(x_0, y),$$

*) Этимъ не исключается возможность того, что функція $f(x, y)$ опредѣлена еще и въ другихъ точкахъ.

представляетъ функцію отъ y въ интервалѣ (c, d) Если функціи $\varphi'(x_0)$, $\psi'(y_0)$ существуютъ, то $\varphi'(x_0)$ называютъ производной функціи $f(x, y)$, взятой по x, а $\psi'(y_0$ производной той же функціи, взятой по y, въ точкѣ (x_0, y_0) Обѣ эти производныя носятъ названіе частныхъ производныхъ функціи $f(x, y)$ въ точкѣ (x_0, y_0). Для обозначенія функціи $\varphi'(x_0)$ употребляютъ символъ $f'_x(x_0, y_0)$, для обозначенія функціи $\psi'(y_0)$—символъ $f'_y(x_0, y_0)$.

Если функціи $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ существуютъ въ интервалѣ $(a, b; c, d)$, то можетъ оказаться, что онѣ, въ свою очередь, могутъ быть дифференцируемы по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0). Производныя функціи $f'_x(x, y)$ по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0) обозначаютъ соотвѣтственно черезъ

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \text{ и } f''_{xy}(x_0, y_0),$$

а производныя отъ $f'_y(x, y)$ по x и по y въ точкѣ (x_0, y_0) обозначаютъ черезъ

$$f''_{yx}(x_0, y_0) \text{ и } f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Эти четыре величины называютъ частными производными второго порядка функціи $f(x, y)$ въ точкѣ (x_0, y_0). Подобнымъ же образомъ опредѣляются и обозначаются частныя производныя третьяго и болѣе высокихъ порядковъ. Какъ мы видимъ, имѣется 2^n частныхъ производныхъ n-го порядка. Но обыкновенно число ихъ сводится къ $n+1$, что можно доказать при помощи слѣдующей теоремы:

Если въ интервалѣ $(a, b; c, d)$ функціи f''_{xy} и f''_{yx} *) существуютъ и если онѣ непрерывны въ точкѣ (x_0, y_0), принадлежащей интервалу $(a, b; c, d)$, то

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Непрерывность функціи отъ двухъ перемѣнныхъ опредѣляется совершенно такимъ же образомъ, какъ это было сдѣлано для функціи отъ одной перемѣнной. Функція $F(x, y)$ называется непрерывной въ точкѣ (x, y), если изъ равенствъ пред $x_n = x$, пред. $y_n = y$ всегда вытекаетъ равенство пред. $F(x_n, y_n) = F(x, y)$; при этомъ всѣ точки (x_n, y_n) такъ же, какъ и точка (x, y), должны принадлежать комплексу точекъ, въ которыхъ функція $F(x, y)$ опредѣлена.

*) Разумѣется, функціи f'_x и f'_y въ этомъ случаѣ должны существовать.

Для доказательства упомянутой выше теоремы разсмотримъ выраженіе

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0);$$

точка $(x_0 + h, y_0 + k)$, какъ и точка (x_0, y_0), должна лежать въ интервалѣ $(a, b; c, d)$. Положимъ

$$f_1(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

и

$$f_2(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y);$$

тогда предыдущее выраженіе будетъ равно выраженію

$$f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) = hf'_1(x_0 + \vartheta_1 h)$$

а также и выраженію

$$f_2(y_0 + k) - f_2(y_0) = kf'_2(y_0 + \vartheta_2 k),$$

при чемъ ϑ_1 и ϑ_2 лежатъ между 0 и 1 *)

Но

$$f'_1(x_0 + \vartheta_1 h) = f'_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0) - kf''_{xy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_1 k)$$

и

$$f'_2(y_0 + \vartheta_2 k) = f'_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_2 k) - f'_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - hf''_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_2 k),$$

при чемъ ϑ_1 и ϑ_2 снова заключаются между 0 и 1 **).

Мы знаемъ, такимъ образомъ, что

$$f''_{xy}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_2 k).$$

Пусть величины h и k стремятся къ нулю; тогда лѣвая и правая части равенства стремятся къ $f''_{xy}(x_0, y_0)$ и $f''_{yx}(x_0, y_0)$, и равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ необходимо выполняется.

*) Условія теоремы о среднемъ значеніи выполняются благодаря сдѣланнымъ нами допущеніямъ.

**) И въ этомъ случаѣ требованія теоремы о среднемъ значеніи удовлетворены.

Дифференціалы функціи $f(x, y)$.

Если функція $f(x, y)$ опредѣлена въ нѣкоторомъ интервалѣ и частныя производныя f'_x, f'_y существуютъ въ точкѣ (x, y), принадлежащей этому интервалу, то выраженіе

$$f'_x(x, y)\,h + f'_y(x, y)\,k$$

называютъ дифференціаломъ функціи $f(x, y)$ въ точкѣ (x, y) и обозначаютъ его символомъ $df(x, y)$. Допустимъ, что h и k суть двѣ величины, вполнѣ независящія отъ x и y. Положивъ въ формулѣ

$$df(x, y) = f'_x h + f'_y k$$

$f = x$ и $f = y$, получимъ

$$dx = h, \quad dy = k.$$

Можно, такимъ образомъ, разсматривать h и k, какъ дифференціалы x и y, и писать

$$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy.$$

Дифференціалъ функціи $df(x, y)$ обозначаютъ символомъ $d^2f(x, y)$, дифференціалъ функціи $d^2f(x, y)$ — символомъ $d^3f(x, y)$ и т. д. Имѣемъ *)

$$d^2f(x, y) = df'_x dx + df'_y dy =$$
$$= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dx\,dy + f''_{yx}dx\,dy + f''_{yy}dy^2,$$

или, если $f''_{xy} = f''_{yx}$,

$$d^2f(x, y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{yy}dy^2.$$

Подобнымъ же образомъ вычисляютъ $d^3f(x, y)$, $d^4f(x, y)$ и т. д.

§ 49. Дифференцированіе сложныхъ функцій.

Пусть $F(u, v)$ будетъ функціей отъ u и v въ интервалѣ $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$, и допустимъ, что $f(x, y)$ и $g(x, y)$ суть функціи отъ x и y въ интервалѣ $(a, b; c, d)$; пусть, сверхъ того, функціи $f(x, y)$ и $g(x, y)$ всегда удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\alpha \leqq f(x, y) \leqq \beta \quad \text{и} \quad \gamma \leqq g(x, y) \leqq \delta.$$

---

*) Величины dx и dy слѣдуетъ разсматривать, какъ постоянныя.

Если при этомъ положить

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

и

$$z = F(u, v),$$

то z черезъ посредство u и v будетъ функціей отъ x и y, а именно

$$z = F(f(x, y), g(x, y)).$$

Вычислимъ дифференціалъ dz. При этомъ будемъ предполагать существованіе функцій f'_x, f'_y, g'_x, g'_y, въ интервалѣ $(a, b; c, d)$ и функцій F'_u, F'_v въ интервалѣ $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$. Отъ функцій F'_u, F'_v мы требуемъ, кромѣ того, чтобы онѣ были непрерывны въ интервалѣ $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$.

Пусть $\Delta_x \varphi$ (соотвѣтственно $\Delta_y \varphi$) будетъ приращеніе функціи φ при переходѣ отъ x къ $x + \Delta x$ (отъ y къ $y + \Delta y$) *). Въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned}\Delta_x z &= F(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - F(u, v) \\ &= F(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - F(u, v + \Delta_x v) \\ &\quad + F(u, v + \Delta_x v) - F(u, v),\end{aligned}$$

и, значитъ, по теоремѣ о среднемъ значеніи,

$$\begin{aligned}\Delta_x z = {} & F'_u(u + \vartheta \Delta_x u, v + \Delta_x v)\, \Delta_x u \\ & + F'_v(u, v + \bar{\vartheta} \Delta_x v)\, \Delta_x v;\end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = {} & F'_u(u + \vartheta \Delta_x u, v + \Delta_x v)\, \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \\ & + F'_v(u, v + \bar{\vartheta} \Delta_x v)\, \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Пусть Δx стремится къ нулю, тогда

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x, \quad \text{пред.}\ \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = v'_x$$

и, слѣдовательно,

$$\text{пред.}\ \Delta_x u = 0, \quad \text{пред.}\ \Delta_x v = 0.$$

---

*) Точки (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ должны обѣ находиться въ интервалѣ $(a, b; c, d)$.

Въ виду непрерывности функцій F'_u и F'_v въ точкѣ (u, v)

$$\text{пред. } F'_u(u + \vartheta\Delta_x u, v + \Delta_x v) = F'_u(u, v),$$
$$\text{пред } F'_v(u, v + \overline{\vartheta}\Delta_x v) = F'_v(u, v)$$

и

$$\zeta'_x = \text{пред. } \frac{\Delta_x \zeta}{\Delta x} = F'_u u'_x + F'_v v'_x.$$

Такимъ же образомъ находимъ, что

$$\zeta'_y = \text{пред. } \frac{\Delta_y \zeta}{\Delta y} = F'_u u'_y + F'_v v'_y.$$

Итакъ,

$$d\zeta = \zeta'_x dx + \zeta'_y dy = F'_u du + F'_v dv.$$

Точно такой же видъ имѣлъ бы дифференціалъ $d\zeta$, если бы перемѣнныя u и v были независимыми

Если существуютъ вторыя производныя отъ u и v въ интервалѣ $(a, b; c, d)$, и если вторыя производныя функціи $F(u, v)$ непрерывны въ интервалѣ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, то *)

$$d^2\zeta = dF'_u du + dF'_v dv + F'_u d^2u + F'_v d^2v;$$

слѣдовательно,

$$d^2\zeta = F''_{uu} du^2 + 2F''_{uv} du dv + F''_{vv} dv^2 + F'_u d^2u + F'_v d^2v.$$

Формулы для $d^3\zeta, d^4\zeta, \ldots$ также можно легко получить. Однако, выраженія для величинъ $d^2\zeta, d^3\zeta, \ldots$ отличны отъ выраженій, получаемыхъ для этихъ величинъ въ томъ случаѣ, когда u и v суть независимыя перемѣнныя Но этого различія нѣтъ, если u и v представляютъ функціи вида $\lambda x + \mu y + \nu$ (λ, μ, ν — постоянныя величины), потому что въ этомъ случаѣ $d^2u = d^3u = \ldots = 0$ и $d^2v = d^3v = \ldots = 0$

*) Мы основываемся здѣсь на соотношеніи $d(uv) = udv + vdu$, которое получается изъ общаго выраженія для $d\zeta$, если положить $F(u, v) = uv$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

§ 50. Неопредѣленный интегралъ.

Если функція $F(x)$ для значеній $a \leqslant x \leqslant b$ имѣетъ производную $f(x)$ и, слѣдовательно, дифференціалъ $f(x)dx$, то функцію $F(x)$ называютъ интеграломъ функціи $f(x)$ или дифференціала $f(x)dx$ въ интервалѣ (a, b) и пишутъ

$$F(x) = \int f(x)dx$$

($F(x)$ равно интегралу $f(x)dx$) *). Эта формула, такимъ образомъ, вполнѣ равнозначна формулѣ

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Если функція $F_0(x)$ является интеграломъ дифференціала $f(x)dx$ въ интервалѣ (a, b) и функція $F(x)$ также представляетъ интегралъ того же дифференціала, то

$$dF_0(x) = f(x)dx, \quad dF(x) = f(x)dx,$$

слѣдовательно,

$$d(F(x) - F_0(x)) = 0.$$

Разность $F(x) - F_0(x)$ имѣетъ поэтому (ср. стр. 64) постоянное значеніе C для значеній перемѣнной $a \leqslant x \leqslant b$, т. е.

$$F(x) = F_0(x) + C$$

Обратно, какова бы ни была постоянная величина C, функція $F_0(x) + C$ всегда представляетъ интегралъ функціи $f(x)dx$, потому что

$$d(F_0(x) + C) = dF_0(x) = f(x)dx.$$

---

*) Если функція $F(x)$ имѣетъ производную $f(x)$ только внутри интервала (a, b), то мы говоримъ, что функція $F(x)$ представляетъ интегралъ функціи $f(x)$ внутри интервала (a, b)

Выраженіе $F_0(x) + C$, какъ содержащее неопредѣленную постоянную C, носитъ названіе **неопредѣленнаго интеграла** функціи $f(x)\,dx$. Всякій интегралъ функціи $f(x)\,dx$ можно получить изъ неопредѣленнаго интеграла, если приписать нѣкоторое частное значеніе произвольной постоянной C, такъ называемой **постоянной интеграціи**.

Интегрировать функцію $f(x)$ значитъ найти ея неопредѣленный интегралъ.

§ 51. Примѣры.

1. Если ϱ есть радіусъ сходимости степеннаго ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

и мы положимъ

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad (|x| < \varrho)$$

то внутри интервала $(-\varrho, \varrho)$

$$\int f(x)\,dx = C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots$$

Дѣйствительно, согласно § 38, рядъ

$$C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots$$

также имѣетъ радіусъ сходимости ϱ и производную $f(x)$, когда $|x| < \varrho$.

Въ частности

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx$$

$$= C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Интегралъ цѣлой раціональной функціи n-ой степени представляетъ, такимъ образомъ, цѣлую раціональную функцію $(n+1)$-ой степени.

2. Интегралъ раціональной функціи не всегда есть раціональная функція. Для значеній $n = -2, -3, \ldots$ во всякомъ интервалѣ, не содержащемъ нуля,

$$d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,dx;$$

поэтому

$$\int x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Но для $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log x,$$

ибо $d\log x = \frac{dx}{x}$, а при $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log(-x),$$

такъ какъ $d\log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$. Далѣе, изъ равенства $d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$ получаемъ:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + \operatorname{arctg} x.$$

Изъ соотношенія $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ вытекаетъ равенство

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + \arcsin x. \qquad (-1 < x < 1)$$

Точно такъ же изъ равенства

$$d\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

вытекаетъ, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

3. Если $x > 0$ и $n + 1 \neq 0$ *), то

$$d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx.$$

Значитъ, при $x > 0$ и $n + 1 \neq 0$

$$\int x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

*) Случай, когда n есть цѣлое положительное или отрицательное число, мы уже разсмотрѣли.

Напримѣръ, для значенія $x > 0$

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = C + 2x^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C + 2\sqrt{x}.$$

4. Такъ какъ

$$d\frac{a^x}{\log a} = a^x dx,$$

то

$$\int a^x dx = C + \frac{a^x}{\log a}.$$

Въ частности

$$\int e^x dx = C + e^x.$$

5. Изъ равенствъ

$$d(-\cos x) = \sin x\, dx, \quad d\sin x = \cos x\, dx$$

слѣдуетъ:

$$\int \sin x\, dx = C - \cos x, \quad \int \cos x\, dx = C + \sin x.$$

Изъ формулъ

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d(-\cot x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

вытекаетъ, что

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = C + \operatorname{tg} x, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - \cot x;$$

Въ первомъ случаѣ значенія x должны быть ограничены интерваломъ, въ которомъ функція $\cos x$ отлична отъ нуля, во второмъ случаѣ - интерваломъ, въ которомъ функція $\sin x$ отлична отъ нуля.

Положимъ, что въ интервалѣ (a, b) функція $f(x)$ повсюду остается положительной и имѣетъ производную $f'(x)$. Въ такомъ случаѣ (согласно § 33)

$$d\log f(x) = \frac{f'(x)dx}{f(x)},$$

и, слѣдовательно,

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = C + \log f(x);$$

напримѣръ, если функція $\sin x$ во всемъ интервалѣ (a, b) отлична отъ нуля, то

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = C + \log \sin x;$$

точно такъ же

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = C - \log \cos x,$$

если функція $\cos x$ во всемъ интервалѣ (a, b) отлична отъ нуля.

§ 52 Пріемы для упрощенія интеграловъ.

1. $$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx;$$

словами это выражается такъ: постоянную [1]) можно выносить за знакъ интеграла. Доказательство:

$$d(cf(x)) = c\, df(x).$$

2. $$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

словами: интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ [2]). Доказательство:

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x).$$

Теорема справедлива для любого конечнаго числа слагаемыхъ.

3. Если функціи $f(x)$ и $g(x)$ имѣютъ производныя $f'(x)$ и $g'(x)$ внутри интервала (a, b), то функція

$$f(x)g(x) - \int g(x) f'(x)\, dx \text{ [3])}$$

имѣетъ производную

$$(fg)' = gf' + fg' \text{ [4])}$$

т. е. представляетъ собой интегралъ функціи $f(x)g'(x)\, dx$.

Поэтому

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x)\, dx.$$

---

[1]) Т. е. постоянный множитель Теорема предполагаетъ существованіе одного изъ двухъ интеграловъ $\int cf(x)dx$, $\int f(x)dx$. *Прим. ред.*

[2]) Теорема предполагаетъ существованіе двухъ изъ трехъ интеграловъ $\int (f(x)+g(x))dx$, $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$. *Прим. ред.*

[3]) Существованіе интеграла $\int g(x)f'(x)dx$ допускается. *Прим. ред.*

[4]) Изъ этого тождества легко заключить, что изъ двухъ интеграловъ $\int g(x)f'(x)dx$ и $\int f(x)g'(x)dx$ существованіе одного влечетъ за собой существованіе другого *Прим. ред.*

Это есть правило интегрированія по частямъ. Съ его помощью можно свести интегралъ $\int f(x)g'(x)\,dx$ къ (подчасъ болѣе простому) интегралу $\int g(x)f'(x)\,dx$.

4. Допустимъ, что функція $F(u)$ имѣетъ производную $F'(u) = \varphi(u)$ для значеній $\alpha \leqq u \leqq \beta$ и что функція $f(x)$ имѣетъ производную $f'(x)$ для значеній $a \leqq x \leqq b$; предположимъ, далѣе, что значенія функціи $f(x)$ всегда падаютъ въ интервалъ (α, β). Въ такомъ случаѣ, согласно § 32, функція $F(f(x))$ имѣетъ дифференціалъ

$$\varphi(f(x))f'(x)\,dx.$$

Съ другой стороны, дифференціалъ функціи $F(u)$ есть

$$\varphi(u)\,du.$$

Поэтому, въ виду равенства $u = f(x)$,

$$\int \varphi(u)\,du = \int \varphi(f(x))f'(x)\,dx.$$

Эта формула показываетъ, какимъ образомъ можно ввести новую перемѣнную въ интегралъ $\int \varphi(u)\,du$. Перемѣнную u замѣняютъ функціей $f(x)$, а дифференціалъ du дифференціаломъ $f'(x)\,dx$.

§ 53. Примѣры.

1. Вычислить интегралъ $\int \frac{dx}{\sin x}$; допустимъ, что перемѣнная x заключается въ такомъ интервалѣ, въ которомъ функція $\sin x$ нигдѣ не исчезаетъ.

Въ такомъ случаѣ

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}.$$

Но

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right),$$

слѣдовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x),$$

или, принимая во внимание, что

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}, \quad 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2},$$

получаемъ, окончательно

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

2. Путемъ интегрированія по частямъ находимъ:

$$\int e^{-x} x\, dx = -e^{-x} x + \int e^{-x} dx,$$

$$\int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x} x^2 + 2\int e^{-x} x\, dx,$$

. . . . . .

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} x^n + n\int e^{-x} x^{n-1} dx,$$

такъ что

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n!) + C$$

или, положивъ $x^n = f(x)$,

$$\int e^{-x} f(x)\, dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n)}(x)) + C.$$

Эта формула имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ представляетъ любую цѣлую раціональную функцію n ой степени.

3. Для вычисленія интеграла $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$ (при чемъ $-1 < x < 1$) можно положить $x = \cos\varphi$, гдѣ $0 < \varphi < \pi$. Въ такомъ случаѣ

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$dx = -\sin\varphi\, d\varphi$$

и

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int (\cos\varphi - 1)\, d\varphi = C - \varphi - \sin\varphi$$

$$= C - \arccos x + \sqrt{1-x^2}.$$

§ 54. Существованіе интеграла непрерывной функціи.

Допустимъ, что функція $f(x)$ непрерывна для всѣхъ безъ исключенія значеній $a \leqq x \leqq b$. Если интервалъ (α, β) есть произвольный интервалъ, заключающійся въ интервалѣ (a, b), то черезъ $M(\alpha, \beta)$ будемъ обозначать наибольшее, а черезъ $m(\alpha, \beta)$ наименьшее значеніе функціи въ интервалѣ (α, β). Произведеніе отъ умноженія $\beta - \alpha$ на $M(\alpha, \beta)$ обозначимъ черезъ $R(\alpha, \beta)$.

Если $\alpha < \gamma < \beta$, то

$$R(\alpha, \beta) \geq R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta),$$

такъ какъ $M(\alpha, \beta) \geq M(\alpha, \gamma)$ и $M(\alpha, \beta) \geq M(\gamma, \beta)$ [5]). Разобьемъ теперь интервалъ (a, b) на интервалы

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, b)$$

(гдѣ $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < b$), и это разложеніе обозначимъ черезъ $\mathfrak{Z}$ [6]). Сумму

$$R(a, x_1) + R(x_1, x_2) + \ldots + R(x_{p-1}, b)$$

назовемъ

$$S_a^b(\mathfrak{Z}),$$

съ цѣлью подчеркнуть ея зависимость отъ интервала (a, b) и системы $\mathfrak{Z}$.

Предоставляемъ читателю выразить словами то, что обозначаетъ символъ $S_a^b(\mathfrak{Z})$.

Пусть $\bar{\mathfrak{Z}}$ будетъ система интерваловъ, которая получается изъ системы $\mathfrak{Z}$ путемъ разложенія одного изъ интерваловъ, напримѣръ, интервала (α, β), на двѣ части (α, γ) и (γ, β). Чтобы получить сумму $S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}})$, нужно въ суммѣ $S_a^b(\mathfrak{Z})$ замѣнить членъ

$$R(\alpha, \beta) \text{ суммой } R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta).$$

Поэтому можно съ увѣренностью утверждать, что

$$S_a^b(\mathfrak{Z}) \geq S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}})$$

Такимъ образомъ, $S_a^b(\mathfrak{Z})$ не увеличивается, когда одинъ изъ интерваловъ системы разбивается на два. Примѣнивъ это замѣчаніе

---

[5]) $R(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) M(\alpha, \beta) = (\beta - \gamma) M(\alpha, \beta) + (\gamma - \alpha) M(\alpha, \beta) \geq (\beta - \gamma) M(\gamma, \beta) + (\gamma - \alpha) M(\alpha, \gamma) = R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta)$. *Прим. ред.*

[6]) Т. е. $\mathfrak{Z}$ означаетъ систему интерваловъ $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, b)$.

нѣсколько разъ, увидимъ, что сумма $S_a^b(\mathfrak{Z})$ не увеличивается, если перейти отъ $\mathfrak{Z}$ къ нѣкоторой новой системѣ промежутковъ путемъ дѣленія интерваловъ (т. е. путемъ присоединенія новыхъ точекъ дѣленій)

Пусть $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3 \ldots$ будетъ рядъ системъ интерваловъ, полученныхъ путемъ дѣленія интервала (a, b) на части. Допустимъ, что максимальная длина интерваловъ системы $\mathfrak{Z}_n$ будетъ δ_n (такъ что ни одинъ изъ интерваловъ системы не будетъ больше числа δ_n и, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ нихъ будетъ ему равенъ). Мы будемъ разсматривать только такіе рядысистемъ интерваловъ, въ которыхъ каждая система $\mathfrak{Z}_{n+1}$ получается изъ системы $\mathfrak{Z}_n$ путемъ дальнѣйшаго дѣленія интерваловъ послѣдней, при чемъ еще будемъ предполагать, что пред. $\delta_n = 0$. Такіе ряды мы будемъ называть совершенными.

Если рядъ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ есть совершенный рядъ системъ интерваловъ, полученныхъ отъ разложенія интервала (a, b), то необходимо

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_1) \geqq S_a^b(\mathfrak{Z}_2) \geqq S_a^b(\mathfrak{Z}_3) \geqq \ldots$$

Но для каждой системы $\mathfrak{Z}$ удовлетворяются соотношенія *)

$$(b-a)\,m(a, b) \leqq S_a^b(\mathfrak{Z}) \leqq (b-a)\,M(a, b).$$

Такимъ образомъ, рядъ

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_1),\ S_a^b(\mathfrak{Z}_2),\ S_a^b(\mathfrak{Z}_3), \ldots$$

убываетъ и заключается въ конечномъ интервалѣ. вслѣдствіе чего (согласно § 15) существуетъ

$$\text{пред. } S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$$

Обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ S_a^b.

Пусть теперь $\bar{\mathfrak{Z}}_1, \bar{\mathfrak{Z}}_2, \bar{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ будетъ какой-либо другой совершенный рядъ разложеній интервала (a, b) и допустимъ, что

$$\text{пред. } S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_n) = \bar{S}_a^b.$$

Если выберемъ наудачу членъ $S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}})$ изъ ряда

$$S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_1),\ S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_2),\ S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_3), \ldots$$

*) Каждый изъ членовъ $(\beta-\alpha)\,M(\alpha, \beta)$ суммы $S_a^b(\mathfrak{Z})$ больше числа $(\beta-\alpha)\,m(\alpha, b)$ или равенъ ему и меньше числа $(\beta-\alpha)\,M(\alpha, b)$ или равенъ ему.

и допустимъ, что разложеніе $\overline{\mathfrak{Z}}$ содержитъ p интерваловъ, то интервалы системы $\mathfrak{Z}_n$ распадутся по отношенію къ $\overline{\mathfrak{Z}}$ на два класса:

1. интервалы, которые заключаются въ одномъ изъ интерваловъ системы $\overline{\mathfrak{Z}}$;

2. интервалы, внутри которыхъ содержится, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія системы $\mathfrak{Z}$.

Очевидно, интерваловъ второго класса можетъ быть не больше, чѣмъ $p \quad 1$ [7])

Членъ $R(\alpha, \beta)$ суммы $S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$ мы назовемъ членомъ перваго или второго классовъ въ зависимости отъ того, принадлежитъ ли интервалъ (α, β) къ первому, или ко второму классу. Члены второго класса даютъ сумму, которая меньше, чѣмъ

$$(p-1)\,\delta_n M(a, b),$$

или равна этому числу (δ_n есть наибольшая длина интервала въ системѣ $\mathfrak{Z}_n$). Сумма всѣхъ членовъ перваго класса не превосходитъ суммы $S_a^b(\overline{\mathfrak{Z}})$. Поэтому

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_n) \leq S_a^b(\overline{\mathfrak{Z}}) - (p-1)\,\delta_n M(a, b)$$

или, въ виду того, что пред. $\delta_n = 0$,

$$S_a^b < S_a^b(\mathfrak{Z}); \text{ слѣдовательно, также } S_*^b \leq S_a^b.$$

Такимъ же путемъ получаемъ соотношеніе

$$S_a^b \leq S_*^b.$$

Отсюда можно заключить, что

$$S_*^b = \overline{S}_a^b.$$

Сумма $S_a^b(\mathfrak{Z})$ стремится, такимъ образомъ, всегда къ одному и тому же предѣлу S_a^b, когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ любой совершенный рядъ разложеній интервала (a, b).

Мы знаемъ, что сумма $S_a^b(\mathfrak{Z})$ всегда больше числа $(b \quad a)\,m(a, b)$ или равна ему и меньше числа $(b \quad a)\,M(a, b)$ или равна ему.

[7]) Разложеніе $\overline{\mathfrak{Z}}$ содержитъ по допущенію p интерваловъ, которые опредѣляются точками a и b и еще $p-1$ точками, лежащими внутри интервала (a, b). Эти послѣднія $p-1$ точекъ могутъ находиться внутри k интерваловъ системы $\mathfrak{Z}_n$, и, очевидно, k не больше $p-1$. *Прим. ред.*

То же, слѣдовательно, вѣрно и относительно S_a^b, и потому, въ силу непрерывности функціи $(b-a)f(x)$, въ интервалѣ (a, b) существуетъ (ср. § 30) такое значеніе ξ, что

$$S_a^b = (b-a)f(\xi).$$

Когда $a < c < b$, то

$$S_a^b = S_a^c + S_c^b.$$

Для доказательства достаточно разсмотрѣть совершенный рядъ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$, въ которомъ $\mathfrak{Z}_1$ представляетъ разложеніе интервала (a, b) на интервалы (a, c) и (c, b). Сумма $S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$ разлагается въ такомъ случаѣ на двѣ части, изъ которыхъ одна стремится къ предѣлу S_a^c, а другая къ предѣлу S_c^b.

Мы примемъ разъ на всегда, что

$$S_\beta^\alpha = -S_\alpha^\beta [*)],$$

тогда при любомъ выборѣ чиселъ x_1, x_2, x_3 въ интервалѣ (a, b) всегда будетъ справедлива формула

$$(*) \qquad S_{x_1}^{x_2} + S_{x_2}^{x_3} + S_{x_3}^{x_1} = 0.$$

Точно такъ же при всякомъ расположеніи чиселъ x и $x+h$ въ интервалѣ (a, b) всегда будетъ

$$(**) \qquad S_x^{x+h} = hf(x+\vartheta h). \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

Разсмотримъ теперь функцію

$$F(x) = S_a^x$$

и покажемъ, что повсюду въ интервалѣ (a, b) она имѣетъ производную $f(x)$. Этимъ будетъ доказано существованіе интеграла функціи $f(x)$.

Если оба числа x и $x+h$ принадлежатъ интервалу (a, b), то по формулѣ $(*)$

$$F(x+h) - F(x) = S_a^{x+h} + S_x^a = S_x^{x+h},$$

поэтому на основаніи равенства $(**)$

$$F(x+h) - F(x) = hf(x+\vartheta h)$$

*) Этимъ равенствомъ опредѣляется значеніе символа S_β^α при $\beta > \alpha$.

и отсюда (въ виду непрерывности функціи $f(x)$

$$\text{пред.}_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \text{пред.}_{h=0} f(x + \vartheta h) = f(x).$$

т. е.

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Вмѣсто S_n^x пишутъ

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

и читаютъ этотъ символъ такъ.

„Интегралъ $f(x)\,dx$ отъ a до x".

Въ противоположность неопредѣленному интегралу выраженіе $\int_a^x f(x)\,dx$ называютъ опредѣленнымъ интеграломъ. Это тотъ изъ неограниченнаго числа интеграловъ функціи $f(x)$, который для $x = a$ принимаетъ значеніе нуль.

Когда функція $\Phi(x)$ есть нѣкоторый интегралъ функціи $f(x)$, то, какъ намъ извѣстно, функціи $\Phi(x)$ и $\int_a^x f(x)\,dx$ могутъ отличаться другъ отъ друга только на нѣкоторую постоянную C

Такимъ образомъ,

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

При $x = a$ это равенство переходитъ въ слѣдующее:

$$0 = \Phi(a) + C, \text{ такъ что } C = -\Phi(a)$$

и

$$(***) \qquad \int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) - \Phi(a)$$

Правую часть этой важной формулы обозначаютъ символомъ

$$\left(\Phi(x)\right)_a^x.$$

Примѣнивъ вышеприведенныя разсужденія къ функціи $f(x)$, получимъ вмѣсто члена $R(\alpha, \beta)$ выраженіе

$$r(\alpha, \beta) = -(\beta - \alpha)\,m(\alpha, \beta),$$

въ которомъ $m(\alpha, \beta)$ есть наименьшее значеніе функціи $f(x)$ въ интервалѣ (α, β); вмѣсто же суммы $S_a^b(\mathfrak{Z})$ найдемъ выраженіе

$$-s_a^b(\mathfrak{Z}) = -\{r(a, x_1) + r(x_1, x_2) + \ldots + r(x_{p-1}, b)\}.$$

Пусть $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ совершенный рядъ разложеній интервала (a, b); тогда выраженіе

$$-s_a^b(\mathfrak{Z}) \text{ стремится убывая къ } \int_a^b (-f(x))\,dx;$$

слѣдовательно,

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \text{ стремится возрастая къ } -\int_a^b (-f(x))\,dx.$$

А такъ какъ функція

$$-\int_a^x (-f(x))\,dx$$

имѣетъ производную $f(x)$ и исчезаетъ при $x = a$, то по формулѣ (***) найдемъ, что

$$\int_a^x f(x)\,dx = -\int_a^x (-f(x))\,dx;$$

слѣдовательно,

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Мы видимъ отсюда, что сумма

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \text{ возрастая стремится къ } \int_a^b f(x)\,dx,$$

когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ совершенный рядъ разложеній интервала (a, b). Такъ какъ сумма $S_a^b(\mathfrak{Z})$ стремится къ тому же предѣлу убывая, то всегда

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_a^b(\mathfrak{Z}).$$

§ 55. Замѣна перемѣнной въ опредѣленномъ интегралѣ.

Допустимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ непрерывную производную $f'(x)$ въ интервалѣ (a, b) и удовлетворяетъ соотношеніямъ

$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$. Пусть, далѣе, $\varphi(u)$ будетъ нѣкоторая непрерывная функція въ интервалѣ (α, β). Предположимъ, наконецъ, что $f(a) = \gamma$, $f(b) = \delta$.

Въ такомъ случаѣ функція

$$F(u) = \int_{\gamma}^{u} \varphi(u)\, du \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$$

имѣетъ производную $\varphi(u)$. Положивъ $u = f(x)$, найдемъ, что $F(u)$ будетъ функціей отъ x, имѣющей, согласно § 32, производную

$$\varphi(f(x))\, f'(x).$$

А такъ какъ $\gamma = f(a)$, $F(\gamma) = 0$, то

$$F(f(x)) = \int_{a}^{x} \varphi(f(x))\, f'(x)\, dx$$

и въ частности (при $x = b$)

$$\int_{a}^{\delta} \varphi(u)\, du = \int_{a}^{b} \varphi(f(x))\, f'(x)\, dx.$$

§ 56. **Вычисленіе площадей.**

Положимъ, что функція $f(x)$ непрерывна для значеній $a \leqslant x \leqslant b$ и нигдѣ не принимаетъ отрицательныхъ значеній. Въ такомъ случаѣ кривая фуикціи $f(x)$ располагается цѣликомъ по одну сторону оси x-овъ. Изъ концовъ кривой опустимъ перпендикуляры на ось x-овъ и будемъ разсматривать ту часть $\mathfrak{M}$ плоскости, которая ограничена двумя перпендикулярами, осью x-овъ и кривой.



Фиг. 14.

Возьмемъ какую либо систему интерваловъ $\mathfrak{Z}$, на которые разбивается основаніе части плоскости, т. е. интервалъ (a, b), и возставимъ въ точкахъ дѣленій перпендикуляры къ оси x-овъ; тогда вся часть плоскости разобьется на нѣкоторое число частей такого же рода. Если интервалъ (α, β) есть одинъ изъ интерваловъ нашей системы и если $m(\alpha, \beta)$ есть наименьшее, а $M(\alpha, \beta)$ наибольшее значеніе

функціи въ интервалѣ (α, β), то часть плоскости надъ отрѣзкомъ (α, β) не меньше прямоугольника $(\beta - \alpha)\, m(\alpha, \beta)$ и не больше прямоугольника $(\beta - \alpha)\, M(\alpha, \beta)$. Такимъ образомъ, имѣемъ навѣрное:

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \leqslant \mathfrak{A} \leqslant S_a^b(\mathfrak{Z}).$$

Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ совершенный рядъ разложеній, то объ величины, между которыми содержится $\mathfrak{A}$, стремятся къ $\int_a^b f(x)\,dx$. Слѣдовательно, и

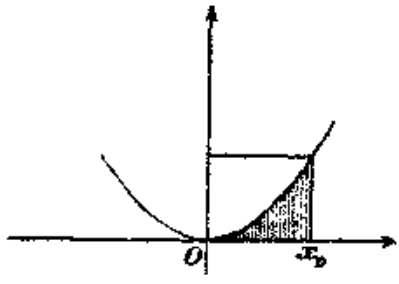
$$\mathfrak{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Вычисленіе площади называютъ **квадратурой**, потому что оно даетъ возможность указать квадратъ, равновеликій данной площади. Принимая во вниманіе указанную связь между вычисленіемъ площади и опредѣленнымъ интеграломъ, вычисленіе опредѣленнаго интеграла также называютъ квадратурой.

§ 57. **Примѣры.**

1. Кривая $y = \frac{x^2}{2k}$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$ есть дуга параболы. Площадь части $\mathfrak{A}$ (заштрихованной на фигурѣ) равна

$$\frac{1}{2k}\int_0^{x_0} x^2\,dx = \frac{x_0^3}{6k} = \frac{1}{3}x_0y_0.$$



Фиг. 15.

Итакъ, дуга параболы дѣлитъ прямоугольникъ, построенный на отрѣзкахъ x_0 и y_0 на части, изъ которыхъ одна вдвое больше другой.

2. Кривая $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ есть полуокружность. Площадь круга поэтому равна

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Для вычисленія этого интеграла примѣнимъ интегрированіе по частямъ:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

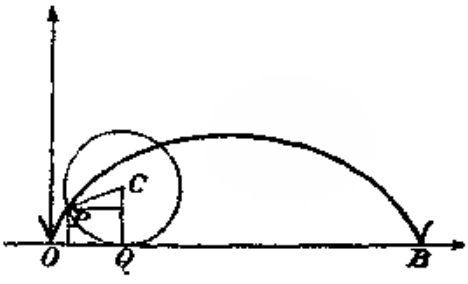
слѣдовательно,

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

и

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

3 Если колесо катится безъ скольженія по прямой линіи, то каждая его точка описываетъ кривую, которую называютъ циклоидой*). Она состоитъ изъ неограниченнаго числа вѣтвей, конгруэнтныхъ дугѣ OPB.



Фиг 16.

Вычислимъ площадь, ограниченную такой вѣтвью циклоиды и основаніемъ OB. Изъ фигуры, на которой дуга круга PQ равна OQ (какъ слѣдуетъ изъ опредѣленія циклоиды), видно, что координаты любой точки циклоиды P выражаются формулами

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

при чемъ t есть уголъ PCQ. Когда уголъ t возрастаетъ отъ 0 до 2π, точка P описываетъ дугу циклоиды APB

Въ виду равенствъ

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \quad y\,dx = a^2(1 - \cos t)^2\,dt$$

подлежащая вычисленію площадь равна

$$a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt,$$

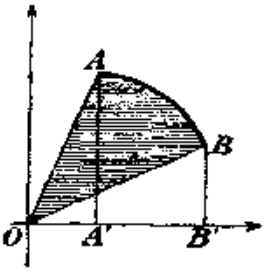
*) Галилей первый разсматривалъ эту кривую.

или, въ виду равенства $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, площадь эта равна

$$a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt = 3\pi a^2.$$

Итакъ, искомая площадь равна утроенной площади образующаго круга.

4 Вычислимъ площадь $\mathfrak{B}$, ограниченную дугой кривой AB и прямыми AO и OB, при чемъ точки A и B суть концы кривой, выражаемой уравненіемъ $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$.



Фиг 17.

Предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ частнымъ случаемъ, изображеннымъ на фигурѣ 17. Тогда

$$\mathfrak{B} = A'BBA + OA'A - OB'B.$$

Такимъ образомъ,

$$\mathfrak{B} = \int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}(xy)_a^b,$$

или *)

$$\mathfrak{B} = \int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x\,dy - y\,dx).$$

т. е.

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\int_a^b (y\,dx - x\,dy)$$

Независимой перемѣнной здѣсь является x.

Формула эта открыта Лейбницемъ.

§ 58. Вычисленіе длины дуги.

Допустимъ, что функція $y = f(x)$ имѣетъ непрерывную производную $f'(x)$ въ интервалѣ (a, b). Вычислимъ длину дуги кривой $y = f(x)$. Разложимъ интервалъ (a, b) на интервалы

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$$

*) Мы полагаемъ, что функція $f'(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b), дабы разсматриваемые интегралы существовали.

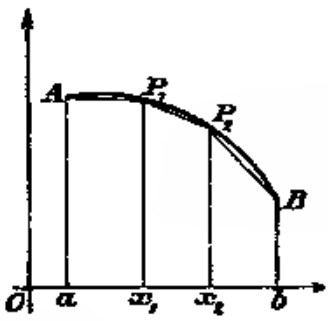
и назовемъ черезъ $\Im$ это разложеніе.

Пусть

$$A,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{p-1},\ B$$

будутъ точки кривой, имѣющія абсциссы

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{p-1},\ b$$



Фиг. 18.

Обозначимъ длину ломанной линіи $AP_1P_2\ \ldots\ P_{p-1}\ B$ черезъ $l(\Im)$. Если $\Im$ пробѣгаетъ совершенный рядъ разложеній, то, какъ мы увидимъ, $l(\Im)$ всегда стремится къ одному и тому же предѣлу l. Этотъ предѣлъ и есть искомая длина дуги *). Если вычислить хорду, соотвѣтствующую интервалу $(\alpha,\ \beta)$, то мы найдемъ, что она равна

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(f(\beta)-f(\alpha))^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+f'^2(\xi)},$$
$$(\alpha<\xi<\beta)$$

При этомъ мы воспользовались теоремой о среднемъ значеніи (§ 30). Положимъ

$$\varphi(x)=\sqrt{1+f'^2(x)};$$

тогда

$$l(\Im)=(x_1-a)\varphi(\xi_1)+(x_2-x_1)\varphi(\xi_2)+\ldots$$
$$+(b-x_{p-1})\varphi(\xi_p),$$

числа $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p$ лежатъ соотвѣтственно внутри интерваловъ (a, x_1), $(x_1,\ x_2),\ \ldots\ (x_{p-1},\ b)$.

Обозначимъ черезъ $M(\alpha,\ \beta)$ наибольшее, а черезъ $m(\alpha,\ \beta)$ наименьшее значеніе функціи $\varphi(x)$ въ интервалѣ $(\alpha,\ \beta)$. Въ такомъ случаѣ

$$l(\Im)\leq(x_1-a)M(a,\ x_1)+(x_2-x_1)M(x_1,\ x_2)+\ldots$$
$$+(b-x_{p-1})M(x_{p-1},\ b),$$
$$l(\Im)\geq(x_1-a)m(a,\ x_1)+(x_2-x_1)m(x_1,\ x_2)+\ldots$$
$$+(b-x_{p-1})m(x_{p-1},\ b).$$

*) Длина дуги кривой такимъ образомъ теперь впервые опредѣляется. Строго говоря, мы должны были бы поступить подобнымъ же образомъ при разсмотрѣніи площади въ § 56.

Когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ нѣкоторый совершенный рядъ разложеній, то оба выраженія, стоящія справа, стремятся къ

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ^*).$$

Такимъ образомъ, имѣемъ также:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

или, въ виду равенства $dy = f'(x)\,dx$,

$$l = \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Выраженіе $\sqrt{dx^2+dy^2}$ называютъ дифференціаломъ дуги, потому что

$$d\int_a^x \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

Вычисленіе длины дуги называется ректификаціей, спрямленіемъ.

§ 59. Примѣры.

1. Если $y = \frac{x^2}{2k}$, то

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx.$$

Итакъ, длина параболической дуги разсмотрѣнной въ § 57, 1, равна

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx.$$

---

*) Функція $\sqrt{1+f'^2(x)}$ непрерывна, согласно § 32, вслѣдствіе непрерывности функцій $\sqrt{1+u^2}$ и $f'(x)$.

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx = x\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} - \int \frac{\frac{x^2}{k^2}\,dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}}$$

$$= x\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} - \int \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}},$$

такъ что

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}}.$$

Но послѣдній интегралъ мы умѣемъ вычислить. Если положимъ $x = k\zeta$, то, согласно § 51, 2, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}} = k\int \frac{d\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} = C + k\log(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2}).$$

Такимъ образомъ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}} = C + k\log\left(\frac{x}{k}+\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)$$

и

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx = \frac{x_0\sqrt{x_0^2+k^2}}{2k} + \frac{k}{2}\log\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+k^2}}{k}.$$

2. Въ циклоидѣ

$$dx = a(1-\cos t)\,dt,\quad dy = a\sin t\,dt,$$

такъ что

$$dx^2+dy^2 = a^2\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\}\,dt^2$$

$$= 2a^2(1-\cos t)\,dt^2,$$

или

$$dx^2+dy^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,dt^2,$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{dx^2+dy^2} \quad 2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Длина цѣлой вѣтви циклоиды равна

$$2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt \quad \cdot 4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi} = 8a,$$

т. е. длина дуги циклоиды равна учетверенному діаметру образующаго круга.

§ 60. **Объемъ и боковая поверхность тѣла вращенія**

Допустимъ, что функція $y = f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b) и не принимаетъ отрицательныхъ значеній. Представимъ себѣ, что кривая $y = f(x)$ начерчена и изъ концовъ ея опущены перпендикуляры на ось x овъ. Эти перпендикуляры вмѣстѣ съ осью x-овъ и кривой ограничиваютъ часть $\mathfrak{M}$ плоскости. Пусть эта кривая вращается вокругъ оси x-овъ: тогда получится нѣкоторое тѣло вращенія $\mathfrak{R}$.

Раздѣлимъ его на части плоскостями, перпендикулярными къ оси x-овъ. Соотвѣтствующее разложеніе интервала (a, b) обозначимъ черезъ $\mathfrak{Z}$. Часть тѣла $\mathfrak{R}$, соотвѣтствующая интервалу (α, β), находится внутри цилиндра, котораго радіусъ основанія есть $M(\alpha, \beta)$ и высота $\beta - \alpha$, и заключаетъ въ себѣ цилиндръ той же высоты, котораго радіусъ основанія есть $m(\alpha, \beta)$. Такимъ образомъ, объемъ тѣла $\mathfrak{R}$ больше суммы всѣхъ цилиндровъ $\pi(\beta-\alpha)\,m^2(\alpha,\beta)$ или равенъ ей и меньше суммы всѣхъ цилиндровъ $\pi(\beta-\alpha)\,M^2(\alpha,\beta)$ или равенъ ей. Отсюда вытекаетъ, что когда $\mathfrak{Z}$ пробѣгаетъ нѣкоторый совершенный рядъ разложеній, то объемъ

$$\mathfrak{V} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \pi\int_a^b y^2\,dx$$

Допустимъ теперь, что въ интервалѣ (a, b) функція $f(x)$ имѣетъ непрерывную производную $f'(x)$.

Какъ и въ § 58, возьмемъ на кривой точки $A, P_1, \ldots, P_{n-1}, B$, имѣющія абсциссы $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$. Каждая изъ хордъ $AP_1, P_1P_2, \ldots$ описываетъ при вращеніи фигуры вокругъ оси x-овъ поверхность

усѣченнаго конуса. Хорда, соотвѣтствующая интервалу (α, β), даетъ боковую поверхность конуса, равную

$$\pi \left\{ f(\alpha) \quad f(\beta) \right\} \sqrt{(\beta \quad \alpha)^2 + (f \beta) \quad f(\alpha))^2}$$

$$= \pi (\beta - \alpha) \left\{ f(\alpha) - f(\beta) \right\} \sqrt{1 \quad f'^2(\xi)}$$

$$(\alpha < \xi < \beta).$$

Но

$$f(\alpha) \quad f(\xi) = (\alpha \quad \xi) f'(\xi),$$

$$f(\beta) \quad f(\xi) \quad (\beta \quad \xi) f'(\xi),$$

при чемъ $\alpha < \xi < \xi < \overline{\xi} < \beta$. Слѣдовательно, поверхность нашего конуса равна

$$2\pi (\beta - \alpha) f(\xi) \sqrt{1 - f'^2(\xi)} \quad \pi (\beta - \alpha) \varrho,$$

гдѣ

$$\varrho = (\alpha - \xi) f'(\xi) \sqrt{1 \quad f'^2(\xi)} \quad ; \quad (\beta \quad \xi) f'(\xi) \sqrt{1 - f'^2(\xi)}.$$

Если мы обозначимъ черезъ μ^2 наибольшее значеніе функціи $f'^2(x)$ въ интервалѣ (a, b), а черезъ δ максимальную длину интервала (α, β), то

$$\varrho < \delta \mu \sqrt{1 \quad \mu^2}.$$

Допустимъ, что наибольшее значеніе функціи $2\pi f(x) \sqrt{1 - f'^2(x)}$ въ интервалѣ (α, β) будетъ $\mathfrak{M}(\alpha, \beta)$, а наименьшее значеніе будетъ $\mathfrak{m}(\alpha, \beta)$. Обозначимъ сумму всѣхъ членовъ вида $(\beta \quad \alpha) \mathfrak{m}(\alpha, \beta)$ символомъ $s_a^b(\Delta)$, а сумму всѣхъ членовъ вида $(\beta \quad \alpha) \mathfrak{M}(\alpha, \beta)$ обозначимъ черезъ $\Sigma_a^b(\Delta)$. Сумма боковыхъ поверхностей p конусовъ, образованныхъ хордами $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_p B$, заключается при такихъ условіяхъ между

$$s_a^b(\Delta) \quad \delta \pi (b - a) \mu \sqrt{1 \quad \mu^2}$$

и

$$\Sigma_a^b(\Delta) \quad \delta \pi (b - a) \mu \sqrt{1 \quad \mu^2}.$$

Пусть Δ проходитъ совершенный рядъ разложеній; тогда обѣ величины (такъ какъ пред. $\delta = 0$) стремятся къ предѣлу

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 - f'^2(x)}\, dx = 2\pi \int_a^{\cdot} y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Этотъ предѣлъ называютъ боковой поверхностью тѣла вращенія.

§ 61. Примѣръ.

Допустимъ, что полукругъ

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

вращается вокругъ оси x-овъ; тогда получимъ шаръ радіуса 1. Согласно § 60, объемъ этого шара равенъ

$$\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx.$$

Но

$$\int (1 - x^2)\, dx = C + x - \frac{x^3}{3}.$$

Поэтому

$$\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Согласно § 60, поверхность шара равна

$$2\pi \int_{-1}^{1} dx = 4\pi,$$

такъ какъ

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{1 - x^2}.$$

Проведя черезъ точки, имѣющія координаты $x = a$, $x = b$*), двѣ плоскости, перпендикулярныя къ оси x-овъ, получимъ шаровой поясъ. Объемъ отвѣчающаго ему сферическаго слоя равенъ

$$\pi \int_{a}^{b} (1 - x^2)\, dx = \pi \left(b - \frac{b^3}{3} \right) - \pi \left(a - \frac{a^3}{3} \right),$$

а боковая поверхность пояса равна

$$2\pi \int_{a}^{b} dx = 2\pi (b - a).$$

---

*) $-1 \leqq a < b \leqq 1$.

Историческій очеркъ *).

Предшественники Лейбница и Ньютона.

Первые зачатки анализа безконечно малыхъ, въ особенности интегральнаго исчисленія, встрѣчаются уже въ классическихъ сочиненіяхъ великихъ греческихъ геометровъ. Архимедъ (287 — 212) владѣлъ методомъ, который по существу представляетъ не что иное, какъ интегральное исчисленіе. Объ этомъ свидѣтельствуютъ сочиненія Архимеда, недавно найденныя Гейбергомъ (Heiberg). Архимедъ пользовался своимъ методомъ для вычисленія поверхностей и объемовъ, а также для опредѣленія центровъ тяжести. Особенно знамениты его квадратура параболическаго сегмента, а также вычисленіе площади круга и объема шара.

Расцвѣтъ математики въ эпоху греческихъ геометровъ смѣнился полнымъ упадкомъ ея въ средніе вѣка; въ 15 вѣкѣ вернулись къ изученію греческихъ геометровъ, но недоставало пониманія той строгости доказательствъ, которую мы встрѣчаемъ у этихъ превосходныхъ мыслителей. Тѣмъ не менѣе работы Архимеда возбуждали большой интересъ.

Знаменитый астрономъ Іоаннъ Кеплеръ (1571 — 1630) достигъ большой виртуозности въ пользованіи методами безконечно малыхъ. Благодаря своему тонкому математическому такту, онъ почти всегда приходилъ къ вѣрнымъ выводамъ, хотя методы его менѣе всего были точны. Въ первой главѣ его „Stereometria doliorum“ (Стереометрія винныхъ бочекъ), напечатанной въ 1615 году, мы находимъ воспроизведеніе работы Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ. Уже здѣсь

*) По лекціямъ Кантора (Cantor) по исторіи математики и по Исторіи математики въ 16 и 17 вѣкахъ Цейтена (Zeuthen). Авторъ пользовался также двумя сочиненіями Гергардта (Gerhardt). „Открытіе дифференціальнаго исчисленія Лейбницемъ“ и „Открытіе высшаго анализа“.

можно судить о томъ, каковъ характеръ изслѣдованій Кеплера въ области анализа безконечно малыхъ, и въ какой мѣрѣ въ нихъ отсутствуетъ хотя бы слѣдъ дѣйствительнаго доказательства. Такъ, напримѣръ, Кеплеръ говоритъ, что шаръ состоитъ „нѣкоторымъ образомъ" изъ безконечно большого числа безконечно тонкихъ конусовъ, вершины которыхъ находятся въ центрѣ, а основанія расположены на поверхности шара. Такимъ образомъ легко найти объемъ шара, если извѣстна его поверхность. Подобнымъ же образомъ Кеплеръ вычисляетъ объемы другихъ тѣлъ. Хотя это легкомысленное обращеніе съ безконечно малыми далеко не соотвѣтствуетъ требованіямъ математической строгости, все же оно способствовало дальнѣйшему развитію науки. Такъ двигаться было легче, чѣмъ во всеоружіи строгихъ методовъ.

Книга Кеплера не оказала, разумѣется, особенно большого вліянія. Въ значительно большей степени посчастливилось въ этомъ отношеніи книгѣ миланца Кавальери (Cavalieri) (1591—1647) „Methodus indivisibilium", хотя ея основныя положенія были неясны и подверглись многимъ нападкамъ. Изъ писемъ Кавальери мы знаемъ, что великій Галилей (1564—1642) владѣлъ подобнымъ же методомъ. Основная идея Кавальери заключается въ слѣдующемъ: часть плоскости можно разсматривать, какъ совокупность всѣхъ хордъ, параллельныхъ какой-либо постоянной прямой, а тѣло можно разсматривать, какъ совокупность всѣхъ плоскихъ сѣченій, параллельныхъ постоянной плоскости. Здѣсь въ основаніи содержится понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ, но еще въ очень неясной формѣ. Метода Кавальери была использована Торичелли (Torricelli), ученикомъ Галилея, для вычисленія площади циклоиды и получила, кромѣ того, самыя разнообразныя примѣненія.

Во Франціи Ферма (Fermat) (1601—1665), Роберваль (Roberval) (1602—1672) и Паскаль (Pascal) (1623—1662) разработали способы раскрытія квадратуръ. Отказавшись отчасти отъ чисто геометрической формы изложенія, они стали разсматривать геометрическіе образы съ аналитической точки зрѣнія, примыкая къ Віета (Vieta) (1540—1603), котораго слѣдуетъ считать въ этомъ отношеніи предшественникомъ Декарта.

Въ высшей степени плодотворной была дѣятельность Валлиса (Wallis) (1616—1703) въ Англіи, который, быть можетъ, больше всѣхъ уклонился отъ строгости греческихъ геометровъ. Въ своей „Arithmetica infinitorum" (1655) онъ пользуется съ большой сме-

лостью индукціей и заключеніями по аналогіи, вообще не употребительными въ математическихъ наукахъ.

Предметомъ изслѣдованій Валлиса, какъ и его предшественниковъ, служило опредѣленіе поверхностей и объемовъ, но его работы отличаются явно выраженнымъ преобладаніемъ ариѳметической стороны вопроса. Онъ пишетъ Arithmetica infinitorum.

Какъ намъ извѣстно, задача о касательной и задача о maxima и minima тѣсно связаны съ дифференціальнымъ исчисленіемъ.

Частные случаи этихъ задачъ обрабатывались еще задолго до открытія дифференціальнаго исчисленія.

Извѣстно, что уже греки умѣли строить касательныя къ различнымъ кривымъ. Торричелли и Роберваль предложили общій, по ихъ мнѣнію, методъ построенія касательныхъ, основанный на кинематическихъ соображеніяхъ *) Линь послѣ открытія аналитической геометріи Декартомъ (1596 — 1650) вопросъ о касательной могъ быть обработанъ въ самомъ общемъ видѣ. Въ своей Géométrie (1637) Декартъ самъ называетъ этотъ вопросъ наиболѣе полезной и общей проблемой геометріи. Правда, Декартово собственное рѣшеніе этой проблемы, въ которомъ онъ пользуется кругомъ, касающимся кривой, не особенно пригодно.

Ферма разработалъ методъ нахожденія maxima и minima и методъ построенія касательной, оперируя съ безконечно малымъ приращеніемъ независимой перемѣнной. Основываясь на этомъ фактѣ, французскіе математики (напримѣръ, Лапласъ) считали даже Ферма изобрѣтателемъ дифференціальнаго исчисленія.

Знаменитый голландскій математикъ и физикъ Гюйгенсъ (Huygens) (1629 — 1695) былъ знакомъ съ работами Ферма и занимался дальнѣйшимъ развитіемъ и болѣе строгимъ обоснованіемъ его метода.

Разработкой вопроса о касательной мы обязаны также Баррову (Barrow) (1630 — 1677), учителю Ньютона. Его работы во многихъ пунктахъ примыкаютъ къ работамъ Торричелли.

Лейбницъ.

Готфридъ Вильгельмъ Лейбницъ родился въ 1646 г. въ Лейпцигѣ. Въ 1661 г., въ возрастѣ 15 лѣтъ, онъ былъ принятъ въ

*) При помощи своего кинематическаго метода имъ удалось рѣшить много задачъ, такъ, напримѣръ, Робервалю удалось найти этимъ путемъ длину дуги циклоиды.

лейпцигскій университетъ. Изученіе логики привело его къ математикѣ; состояніе этой науки въ германскихъ университетахъ того времени не было блестящимъ. На лекціяхъ Лейбницъ познакомился лишь съ элементарной математикой. Временное переселеніе въ Іену также не много способствовало его занятіямъ математикой.

Лишь значительно позже Лейбницъ, уже занятый политической дѣятельностью, познакомился съ новѣйшими успѣхами математики. Въ Парижѣ, куда онъ прибылъ въ 1672 г. съ дипломатической миссіей, онъ познакомился съ знаменитыми людьми, собранными при дворѣ Людовика XIV, и среди нихъ съ Гюйгенсомъ. Какъ разъ въ это время Гюйгенсъ закончилъ свое большое сочиненіе „Horologium oscillatorium". Оно трактуетъ о часахъ съ маятникомъ и въ связи съ этимъ содержитъ множество механическихъ и геометрическихъ изслѣдованій. Читая эту книгу, Лейбницъ увидѣлъ недостаточность своей математической подготовки и принялся ревностно изучать сочиненія великихъ математиковъ, Декарта, Паскаля и т. д. Вскорѣ онъ дѣлаетъ уже собственныя открытія. Онъ нашелъ формулу, которую мы привели въ § 57 (№ 4), и съ помощью ея былъ въ состояніи раскрыть многія уже извѣстныя квадратуры. При этомъ онъ пришелъ также къ равенству

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$$

Уже въ то время Лейбницъ занимался вопросомъ о сходимости знакоперемѣнныхъ рядовъ. Ему принадлежитъ также теорема, которую мы привели въ § 18, № 2; строгое доказательство этой теоремы Лейбницъ даетъ лишь впослѣдствіи (10 янв. 1714 г.) въ письмѣ къ Иванну Бернулли. Письмо Ньютона, переданное ему въ 1676 г. Ольденбургомъ, секретаремъ Лондонскаго Общества Наукъ, *) показало Лейбницу, какіе большіе успѣхи сдѣлали англійскіе математики въ области, въ которую онъ вступилъ. Въ письмѣ Ньютона, между прочимъ, содержится биномиальный рядъ, а также ряды для $\cos x$ и $\sin x$. Но Лейбницъ нисколько не потерялъ бодрости. Напротивъ, сообщенія Ньютона усилили его увлеченіе предметомъ. Уже въ 1673 г. онъ занялся, помимо квадратуръ, также вопросомъ о касательной, а въ 1675 г. онъ настолько подвинулся впередъ, что

*) Лейбницъ познакомился съ Ольденбургомъ въ 1673 г. во время своего пребыванія въ Лондонѣ.

ввелъ принятые теперь во всемъ мірѣ знаки операцій d и $\int$. Это былъ шагъ величайшей важности. Лейбницъ былъ правъ, когда впослѣдствіи (1693) въ письмѣ къ маркизу де-Лопиталю (Marquis de l'Hôpital) говоритъ, что тайна успѣха анализа заключается, до нѣкоторой степени, въ способѣ обозначенія; и во многихъ другихъ случаяхъ Лейбницъ также подчеркивалъ значеніе цѣлесообразной системы символовъ*) Можно почти достовѣрно указать тотъ день, когда Лейбницъ впервые употребилъ оба символа d и $\int$. Это случилось **29-го октября 1675 г.** Введя эти символы, Лейбницъ тотчасъ занялся изысканіемъ простѣйшихъ правилъ операцій надъ ними**). Онъ понималъ, что имъ открытъ новый способъ исчисленія (novum genus calculi, какъ онъ самъ говоритъ), и сознавалъ всю его важность. Это именно обстоятельство и даетъ намъ право считать его истиннымъ изобрѣтателемъ исчисленія безконечно малыхъ. Нужно сознаться, что въ различныхъ мѣстахъ своихъ сочиненій Лейбницъ неясно выражаетъ, что онъ собственно понимаетъ подъ своими дифференціалами. Но въ его первой статьѣ по дифференціальному исчисленію, которая появилась въ 1684 г въ Acta Eruditorum, мы находимъ въ началѣ точно такое же опредѣленіе дифференціаловъ, какое имъ дается въ настоящее время. Тамъ сказано буквально слѣдующее: „Допустимъ, что дана ось AX и нѣсколько кривыхъ II, WW, YY, ZZ. Обозначимъ ихъ ординаты IX, WX, YX, ZX, перпендикулярныя къ оси, черезъ v, w, y, z, а отрѣзокъ AX оси черезъ x. Пусть касательныя будутъ IB, WC, YD, ZE. Предположимъ, что онѣ встрѣчаютъ ось соотвѣтственно въ точкахъ B, C, D, E. Обозначимъ теперь черезъ dx нѣкоторый произвольно выбранный отрѣзокъ и черезъ dv (или dw, или dy, или dz) отрѣзокъ, отношеніе котораго къ dx равно отношенію v (или w, или y, или z) къ XB (или XC, или XD, или XE)".

Принимая во вниманіе, что v' есть угловой коэффиціентъ касательной, имѣемъ:

*) 26-го марта 1676 г. онъ пишетъ: illustribus exemplis quotidie disco, omnem solvendi pariter problemata et inveniendi theoremata artem, tunc cum res ipsa imaginationi non subjacet aut nimis vasta est, eo redire, ut characteribus sive compendiis imaginationi subjiciatur, atque quae pingi non possunt, qualia sunt intelligibilia, ea pingantur tamen hieroglyphica quadam ratione, sed eadem et philosophica. Quod fit, si non ut pictores, mystae aut Sinenses similitudines quasdam sectemur, sed rei ipsius ideam sequamur.

** 21-го ноября 1675 г. онъ нашелъ формулу $d(uv) = udv + vdu$.

$$dv \quad \frac{XV}{XB}dx - v'dx,$$

т. е. то именно, что мы теперь называемъ дифференціаломъ v.

Въ 1676 г. Лейбницъ отправился въ Ганноверъ въ качествѣ директора герцогской библіотеки. Эта новая должность, а также его политическая и философская дѣятельность отнимали у него много времени. Но онъ все еще не переставалъ трудиться надъ разработкой своего новаго исчисленія и его приложеній. Среди оставшихся послѣ него бумагъ мы находимъ различные наброски по этому предмету, навѣрное предназначенные для печатнаго сочиненія. Но опубликованіе этихъ статей послѣдовало, какъ упомянуто выше, лишь въ 1684 г. Между тѣмъ Лейбницъ писалъ о своемъ дифференціальномъ исчисленіи въ письмѣ къ Ньютону (1677 г.).

Курфюрстъ Фридрихъ III призвалъ Лейбница въ Берлинъ; тамъ онъ основалъ академію наукъ. Возвратившись въ Ганноверъ, Лейбницъ занялся въ 1713 году упроченіемъ за курфюрстомъ ганноверскимъ престолонаслѣдія въ Англіи, которое тори не хотѣли за нимъ признать. Эта политическая дѣятельность Лейбница много способствовала установленію враждебныхъ отношеній между нимъ и Ньютономъ, принадлежавшимъ къ партіи торіевъ. Въ 1714 г. курфюрстъ ганноверскій вступилъ на англійскій престолъ. Но Лейбницъ впалъ въ немилость и послѣдніе годы своей жизни провелъ въ одиночествѣ. Въ 1716 г. смерть положила конецъ его тяжелымъ физическимъ страданіямъ.

Ньютонъ.

Исаакъ Ньютонъ родился въ 1642 году въ Вульсторпѣ (Woolsthorpe) близъ Грантама въ Линкольнширѣ и поступилъ въ 1661 году въ Кэмбриджскій университетъ. Здѣсь онъ изучалъ Géométrie Декарта и Arithmetica infinitorum Валлиса и слушалъ лекціи Баррова. Какъ видно, ему везло больше, чѣмъ Лейбницу, который за время своего студенчества ничего не узналъ о новѣйшихъ успѣхахъ математики. Ньютонъ самостоятельно размышлялъ обо всемъ прочитанномъ и, по его собственнымъ словамъ, „постоянное размышленіе“ и было тѣмъ путемъ, который привелъ его къ великимъ открытіямъ. Въ теченіе 1665 — 67 г. г. онъ открылъ (побуждаемый изученіемъ Валлиса) формулу бинома для дробныхъ (ср. выше § 39) положительныхъ и отрицательныхъ показателей

и различные другіе результаты, связанные съ безконечными рядами *). Уже тогда онъ положилъ основаніе своему исчисленію флюксій. Прямое и обратное исчисленіе флюксій представляютъ собой то же, что дифференціальное и интегральное исчисленіе. Къ этому же времени относится его великое открытіе всемірнаго тяготѣнія. Основная идея исчисленія флюксій заключается въ томъ, что всякая перемѣнная, или „флюента", разсматривается, какъ функція времени. Такимъ образомъ, время является общей независимой перемѣнной. Скорость измѣненія флюенты x Ньютонъ называетъ „флюксіей" отъ x и обозначаетъ ее символомъ $\dot{x}$. Если x измѣняется равномѣрно, т. е. въ равные промежутки времени измѣненія представляютъ величину постоянную, то $\dot{x} = 1$. Итакъ, Ньютоновы флюксіи представляютъ поэтому то же, что и производныя или отношенія дифференціаловъ, при чемъ только время является независимой перемѣнной.

Удивительно, что Ньютонъ, сдѣлавъ такъ много примѣненій своей теоріи флюксій, совершенно не воспользовался ею въ своемъ большомъ сочиненіи: „Philosophiae naturalis principia mathematica" (1686 — 87). По собственному указанію, ему удалось найти большинство выводовъ, приведенныхъ въ этой книгѣ, при помощи своего метода исчисленія флюксій; послѣ ея появленія Лейбницъ также показалъ, какъ легко добыть большинство результатовъ по способу исчисленія безконечно малыхъ. Но Ньютонъ старался излагать важныя изслѣдованія, заключающіяся въ его „Principia", въ такой формѣ, которая не требовала бы отъ читателя знакомства съ новымъ методомъ исчисленія.

Ньютонъ опубликовалъ свое исчисленіе флюксій очень поздно, хотя различныя статьи давно лежали у него обработанными. Его главное сочиненіе объ исчисленіи безконечно-малыхъ „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" было напечатано лишь послѣ его смерти (онъ умеръ въ 1727 г.) Ньютонъ всегда питалъ большое нерасположеніе къ публичному выступленію. Говорятъ, что его переставалъ интересовать предметъ, которымъ онъ занимался, какъ только другіе печатали что-либо объ этомъ предметѣ. Можетъ быть это и послужило причиной столь поздняго опубликованія исчисленія флюксій, слишкомъ поздняго, чтобы имѣть значеніе наряду съ распространеннымъ уже исчисленіемъ Лейбница.

*) Напримѣръ, разложеніе въ рядъ алгебраическихъ функцій.

Споръ о пріоритетѣ между Ньютономъ и Лейбницемъ.

Въ 1699 г. Николай Фаціо де Дулье (Nicolas Fatio de Duillier, женевецъ, находившійся въ сношеніяхъ съ Гюйгенсомъ, членъ Королевскаго Общества) напечаталъ съ разрѣшенія этого общества статью, въ которой онъ упрекаетъ Лейбница въ томъ, что тотъ не изобрѣлъ своего дифференціальнаго исчисленія самостоятельно, а позаимствовалъ его у Ньютона. Лейбницъ пожаловался на это обвиненіе Королевскому Обществу и помѣстилъ отвѣтъ на нападки Фаціо въ „Acta Eruditorum". Онъ приводитъ собственное свидѣтельство Ньютона, который въ своихъ „Principia" публично призналъ взаимную независимость своего открытія и открытія Лейбница (1687).

Въ 1704 г. Ньютонъ напечаталъ свою старую статью о квадратурѣ кривыхъ въ приложеніи къ одному сочиненію по оптикѣ; статья эта заключаетъ въ себѣ краткій очеркъ исчисленія флюксій. Лейбницъ написалъ для Acta Eruditorum замѣтку объ этой статьѣ, не называя, однако, своего имени. Въ этой замѣткѣ находится примѣчаніе, которое можетъ быть понято такъ, что имъ отрицается самостоятельность открытія Ньютона, а самъ Ньютонъ ставится въ зависимость отъ Лейбница. Ньютонъ, будучи поглощенъ тогда политической дѣятельностью, повидимому, не прочиталъ этой статьи. Иначе онъ можетъ быть отвѣтилъ бы на нее. Лейбницъ воспользовался также смертью Якова Бернулли (который вмѣстѣ со своимъ братомъ Иваномъ много сдѣлалъ для разработки и примѣненія исчисленія Лейбница), чтобы въ некрологѣ представить „анализъ безконечно малыхъ Лейбница", какъ великое открытіе, не упоминая при этомъ о Ньютонѣ.

Линь въ 1710 году выступила противная сторона. Джонъ Кейль (John Keill), приверженецъ Ньютона, написалъ работу о центростремительныхъ силахъ и прямо утверждалъ въ ней, что Лейбницъ опубликовалъ исчисленіе флюксій Ньютона въ Acta Eruditorum, „измѣнивъ названіе и способъ обозначенія" Лейбницъ снова жаловался Королевскому Обществу, президентомъ котораго въ это время былъ Ньютонъ. И тогда, наконецъ, была составлена коммиссія для выясненія обстоятельствъ дѣла. Она высказалась въ томъ смыслѣ, что признала Ньютона первымъ изобрѣтателемъ исчисленія безконечно малыхъ. Сочиненія, послужившія матеріаломъ для этого сужденія, были напечатаны и распространены повсюду. Всѣ

усилія Лейбница и безпристрастныхъ ученыхъ были безуспѣшны. Въ теченіе всего 18-го столѣтія рѣшеніе этой коммиссіи считалось авторитетнымъ, и лишь въ 19-мъ вѣкѣ честь нашего великаго соотечественника была возстановлена. Независимость его открытія отъ открытія Ньютона достовѣрно доказана, и никто не долженъ теперь сомнѣваться въ этомъ. Можно только утверждать, что Лейбницъ и въ такой же или, быть можетъ, еще въ большей мѣрѣ и Ньютонъ — находился въ зависимости отъ тѣхъ, которыхъ мы выше назвали предшественниками ихъ обоихъ.

МАТЕЗИСЪ

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области Физико-математическихъ наукъ.

Вышли въ свѣтъ слѣдующія изданія:

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Физика неба**. Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. 8°. 66 черн. и 2 цвѣтн. рис. въ текстѣ. Черная и спектральная таблицы. 1905. Ц. Р. 2.—

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русская Мысль.*

АБРАГАМЪ, Г. проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ**. Перев. съ франц. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* **Часть I**: Работы въ мастерской—Геометрія и механика—Теплота XVI+272 стр. 8°. Свыше 300 рис. 2-е изд. 1909 (печатается) Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библіотека Самообразованія.*

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнетизмъ—434+LXXV стр. 8°. Свыше 400 рисунковъ. 1906 Ц. Р. 2. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей, подъ ред. *„Вѣстн. Опытной Физики и Элементарной Математики"* 2-е изданіе. VI+157 стр. 8°. 41 рис. и 2 таблицы. 1907. Ц. 75 к.

Нужно надѣяться, что послѣднее...послужитъ къ широкому распространенію этой чрезвычайно интересной книги. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. **Царица міра и ея тѣнь**. Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи и энтропіи**. Пер. съ нѣм. 3-е изданіе VIII+56 стр. 8°. 1908. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной. *Журн. М. Н. Пр. Проф. О. Хвольсона.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Астрономія для всѣхъ**. Перев. съ англ. подъ редакц. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго* XXIV+286 стр. 8°. Съ портр. автора, 64 рис. и 1 табл. 1905. Ц. Р. 1. 50 к.

И вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга — переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

ВЕБЕРЪ, Г. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, І.** проф. **Энциклопедія элементарной алгебры**. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*. XIV+623 стр. 8°. Съ 38 чертеж. 1907. Ц. Р. 3. 50 к.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. **Непрерывность и иррациональныя числа**. Перев. съ нѣм. съ примѣч. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*; съ присоединеніемъ его статьи: **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ**. 2-е изд. 40 стр. 8°. 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ... *Русская Школа.*

ПЕРРИ, ДЖ. проф. **Вращающійся волчекъ.** Публичная лекція. Пер. съ англ. VIII+95 стр. 8°. Съ 63 рис. 2-е изд. 1908. Ц. 60 к.

Квижка, всечію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цѣховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Школа.* *С. Шохоръ-Троцкій.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборант. *К. С. Ельчанинова.* II+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1, 20 к.

Превосходная квига, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ.
Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur.

ВИХЕРТЪ, Э. проф. **Введеніе въ геодезію.** Перев. съ нѣмецк. 80 стр. 16°. Съ 14 рисунк. 1907. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя ввиду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія.** Перев. съ нѣмецк. *Ю. А. Говсьева* подъ редакц. и съ предисл. проф. *Н. Н. Ланге.* VI+171 стр. 8°. 1907. Ц. Р. 1. —

Философомъ эта хрестоматія не сдѣлаетъ.. но для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она дастъ разнообразн. и интересн. матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОХГОДЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭЙМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики.** Пер. съ англійск. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго.* Съ приложеніемъ рѣчи *А. Бальфура:* **„Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества“.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портретами, 6 таблицами и 33 рисунками. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго геніа. *Современный міръ.*

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ III (1907) итальянск. изданія. XII+166 стр. 8°. Съ 21 рис. 1908. Ц. Р. 1.—

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному читателю, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.** 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи.
Педагогическій Сборникъ.

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Образованіе міровъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* 208 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908 Ц. Р. 1 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ.
Педагогическій Сборникъ.

Ушинскій, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

Каганъ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

Циннерманъ, Б. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Риги, А. проф. **Электрическая природа матеріи.** Вступительная лекція. Пер. съ итальянскаго. 28 стр. 8°. 1908. Ц. 30 к.

Ленанъ О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣмецк. *П. В. Казанецкаго.* IV+43 стр. 8°. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

Ланжъ, П и Аппель, Я. Историческая физика Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем."*. Въ 2-хъ том. большого формата, 880 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными табл. 1908. (Подробнѣе см. 2-ую стр. обложки). Ц. Р. 7. 50 к.

Вейнбергъ, Б. П. прив.-доц. **Снѣгъ. вней. градъ. ледъ и ледники.** IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р.

Ковалевскій, Г. проф **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ.** Перев. съ нѣмецкаго подъ редакц. и съ прим. придв.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1. —

Трописсонъ, Сильвануссъ, проф. **Добываніе свѣта.** Общедоступная лекція для рабочихъ прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Слаби, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт. Физ. и Элемент. Матем."*. 42 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Имѣется на складѣ:

Линдеманъ, Ф. проф. **Форма и центръ атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 25 стр. 16°. 1907. Ц. 20 к.

Мультонъ, Ф. проф **Эволюція солнечной системы.** Перев. съ англійск. IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908 Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

Ефремовъ, Д. кандид. матем. наукъ. **Новая геометрія треугольника.** 334+XIII стр. 8°. 1902 Ц. Р. 2. —

Печатаются и готовятся къ печати:

Снайдеръ, проф. **Міровая картина современнаго естествознанія.** Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.*

Кутюра, Л. Алгебра логики. Перев. съ франц. подъ редакціей и съ примѣчаніями проф. *И. В. Слешинскаго.*

ВЕБЕРЪ и ВЕЛЬШТЕЙНЪ, проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

РОУ, СУНДАРА. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Переводъ съ англійскаго.

КЭДЖОРИ, Ф проф. **Исторія элементарной математики** съ нѣкоторыми указаніями для препод. Перев. съ англійскаго подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.*

ТОМСОНЪ, ДЖ. ДЖ. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Перев. съ англ. подъ ред. „В. Оп. Ф. и Эл. Мат."

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи** (учебникъ). Около 30 печатныхъ листовъ.

ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ. Небо и міропоззрѣніе въ круговоротѣ временъ. Пер. съ нѣмецкаго.

БОЛДЪ, проф. **Вѣка и приливы.** Перев. съ англійскаго.

АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц *С. О. Шатуновскаго.*

ЛОРЕНЦЪ. проф. **Учебникъ физики.** Переводъ съ нѣмецкаго. Два тома. Около 60 печатныхъ листовъ

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ французск. подъ редакц. прив.-доц. *В. Кагана.*

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. **Лекціи по элементарной математикѣ для учителей.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана*

КОВАЛЕВСКІЙ Г., проф. **Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.*

Выписывающіе изъ склада изданій „МАТЕЗИСЪ" (Одесса, Новосельская, 66) на сумму 5 руб. и больше, за пересылку не платятъ.

Каталогъ по требованію высылается безплатно.

ОТДѢЛЕНІЕ СКЛАДА ДЛЯ МОСКВЫ:

КНИЖНЫЙ МАГАЗИНЪ „Образованіе"

Москва, Кузнецкій мостъ, 11.